Prefazione

Se si chiede a qualcuno che ricordo ha di una pagina del libro di matematica delle scuole secondarie superiori, è possibile che gli venga in mente che potesse contenere una formula questa:

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}} = \frac{\frac{\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{x^4+x^2}}}}{\frac{\sqrt[3]{a^2-bx^3}}{d^2-\sqrt{x+\sqrt{x+1}}}}$$

Naturalmente, chiunque capisce che me la sono inventata, anche se non è poi così inverosimile. Se poi la stessa persona ha visto, per qualche motivo, un libro di matematica per specialisti, od un lavoro pubblicato in una rivista matematica, potrebbe averne un ricordo di questo tipo:

Therefore, for every $t \in [0, T(x)[$, we have

$$d(\eta(x,t),x) \leq t\,,$$

$$f(\eta(x,t)) \in f(x) - \left(\inf_{0\leq s\leq t} \sigma(\eta(x,s))\right) tP_0 - P\,.$$

Now assume that $0 < T(x) < +\infty$. If $\tau_{h-1}(x) \le t_1 \le \tau_h(x) \le t_2 \le \tau_{h+1}(x)$, we have

$$d(\eta(x,t_2),\eta(x,t_1)) \le d(\eta(x,t_2),\eta(x,\tau_h(x)))+$$

$$+d(\eta(x,\tau_h(x)),\eta(x,\tau_{h-1}(x))) + d(\eta(x,\tau_{h-1}(x)),\eta(x,t_1)) \le$$

$$\le t_2-\tau_h(x)+\tau_h(x)-\tau_{h-1}(x)+t_1-\tau_{h-1}(x) \le 2(T(x)-\tau_{h-1}(x))\,.$$

The same conclusion holds if $\tau_{h-1}(x) \le t_1 \le \tau_h(x) \le \tau_j(x) \le t_2 \le \tau_{j+1}(x)$. It follows

$$\forall t_1, t_2 \in [\tau_h(x), T(x)[: \quad d(\eta(x,t_2),\eta(x,t_1)) \le 2(T(x)-\tau_h(x))\,.$$

Since $T(x) < +\infty$, this implies that $\eta(x,\cdot)$ is a Cauchy function as $t \to T(x)$.

Finally, let $0 < T(x) < +\infty$ and assume there exists $\overline{x} := \lim\limits_{t \to T(x)} \eta(x,t)$. Since

$$\tau_1(\eta(x,\tau_h(x))) = \tau_1(\eta_h(x,\tau_h(x))) = \tau_{h+1}(x) - \tau_h(x)\,,$$

we have $\tau_1(\overline{x}) = 0$. It follows $|d_{P_0} f|\,(\overline{x}) = 0$.

Questo pezzo, tra l'altro, è autentico, e chiedo naturalmente scusa ai miei due coautori per aver usato una pagina di un nostro lavoro, pubblicato per tutt'altri scopi...

Quanto alle formule, si può far di meglio, almeno dal punto di vista estetico. Ad esempio, le prossime mi sembrano accattivanti, e poi trattano dell'esistenza di Dio, un argomento mica da poco... Non sto scherzando, e l'ideatore di questa cosa è considerato, a giudizio unanime, un genio assoluto. Ma di questo signore parleremo diffusamente più avanti. Queste righe trattano di proprietà che dovrebbero essere peculiari di Dio:

$$P(\phi)\cdot P(\psi) \supset P(\phi\cdot\psi)$$

$$P(\phi) \supset NP(\phi),$$

$$\sim P(\phi) \supset \sim NP(\phi).$$

Ed ecco la *definizione* di Dio.

$$G(x) \equiv (\phi)[P(\phi) \supset \phi(x)].$$

A parte gli scherzi, alcune formule sono proprio belle, guardate ad esempio questa:

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

che penso sia, a parere di qualsiasi matematico, una delle più straordinarie che siano mai state scritte. Il guaio è che in genere i matematici tendono a tenere le belle formule un po' nascoste. Magari non quella qui sopra, che al contrario è famosa e ben pubblicizzata. Ma l'errore più grave che noi insegnanti di matematica facciamo è quello di enfatizzare l'aspetto del calcolo, di dare troppa importanza alle regole e ai tecnicismi, trascurando il fatto che regole e tecniche nascono da esigenze pratiche, e hanno dietro idee e inventiva. Il risultato è che la maggior parte delle persone, che ha studiato la matematica nella scuola secondaria e poi non apre mai più un libro che ne parli, a meno che non lo debba fare, con una certa angoscia, per aiutare i figli, è per sempre convinta che la matematica sia (soltanto) una serie di simboli che solo gli addetti ai lavori sanno comprendere[*]. Penso non sia facile analizzare le ragioni per le quali non sembriamo avere troppo interesse a fare capire agli altri che ciò che facciamo, studiamo, cerchiamo non si limita ad essere una serie di simboli esoterici; una possibile prima spiegazione, ma che capisco essere abbastanza ingenua, è che ci piace l'idea di sembrare un po' misteriosi e distanti, di fare cose che solo noi possiamo capire, come fossimo una setta con un linguaggio segreto. È noto che ciò che è misterioso fa un po' paura e attrae nello stesso tempo.

Vorrei che fosse ben chiaro che non critico nessuno, anzi devo dire che la mia ammirazione per il lavoro svolto dai professori è tanta, ed aumenta col diminuire dell'età dei discenti. E comunque il problema è sempre a monte: tendenzialmente si insegna quel che si è imparato, quindi semmai il primo anello di una catena non virtuosa è l'insegnamento universitario.

[*] A volte un matematico non capisce nemmeno se stesso: mi è successo, e so che è successo ad altri, di "inventare" delle formule, di pubblicarle, di dover riprendere mesi dopo il lavoro e di passare attimi di angoscia pura perché non riuscivo a capire che cosa avessi scritto e perché l'avessi scritto.

Le mie considerazioni nascono soprattutto dal fatto di aver visto i miei figli, i loro amici, tanti e tanti ragazzi e ragazze che subiscono la matematica con rassegnazione, oppure che si ribellano ad essa e a chi la insegna. Ho visto troppi ragazzi intelligenti ma disarmati di fronte a un testo di matematica; un rifiuto totale, un'alienazione completa. La matematica vissuta come un guazzabuglio di cose senza senso, un insieme di formule che a qualcuno, ai docenti della materia, dicono qualcosa, agli altri procurano solo disgusto. So benissimo che ci sono delle eccezioni. Ci sono quelli che *apprezzano* il contenuto puramente algebrico della matematica. Lo capiscono senza troppe difficoltà, senza eccessiva fatica, senza troppe spiegazioni. Uno dei miei figli è così, e vedo che con lui è meglio *non* dilungarsi nelle spiegazioni, perché rischio di turbare un meccanismo di apprendimento che per me rimane misterioso.

Queste sono eccezioni e non si può imporre alla maggioranza di essere così. Non ho ricette da proporre, perché sono convinto che la matematica sia una cosa difficile da spiegare e difficile da capire. Quando mi capita di fare delle conferenze nelle scuole, so di ingannare i ragazzi che ascoltano se alla fine hanno la faccia sorridente e l'aria di dirmi, *la matematica così è tutt'altra cosa*! Facile essere accattivanti in un'ora di conferenza, magari anche in un minicorso, soprattutto se scegli gli argomenti giusti[†]. Ma quando devi entrare un po' nei dettagli, le cose si complicano, e nessuno ha la ricetta per renderle semplici.

Però si potrebbe fare lo sforzo, anzi è necessario fare uno sforzo, per convincere gli altri che la matematica è anche questo, ma non solo questo. Nella matematica c'è il calcolo, che ne rappresenta una parte essenziale. Ma il calcolo, senza idee dietro, non va da nessuna parte, non è nulla, diventa un delirio.

La matematica è soprattutto *idee*. Tra l'altro, molte di queste idee sono stupende. Possono dare, se opportunamente illustrate, uno spunto di riflessione, mille altre idee alla filosofia, alla vita di tutti i giorni, alla politica...

Mi prendo una pausa, per illustrare uno degli esempi che preferisco.

[†] Altri argomenti, al contrario, mi sembrano noiosi in maniera disperante.

A volte, è interessante dimostrare l'esistenza di un oggetto particolare, ad esempio il minimo di una funzione, definita su un insieme che non ha un numero finito di elementi. Vediamo un esempio molto famoso. Supponiamo di avere un oggetto che sta su un piano verticale, in un punto a, e che deve raggiungere un punto b, a quota più bassa, sospinto dalla forza di gravità. Qual è la curva congiungente a e b, che permette all'oggetto di raggiungere b *nel più breve tempo possibile*? Si chiama problema della *brachistocrona*, ed è abbastanza chiaro che la risposta *non* è il segmento che congiunge i due punti. Che è la via più breve, ma non la più veloce: l'intuizione ci fa capire che conviene farlo viaggiare su una curva che inizialmente ha tangente verticale, così prende subito più velocità. Pare che Galileo abbia dato la risposta sbagliata alla questione, suggerendo una parte di circonferenza. Devo farla breve, magari racconterò tutta la storia un'altra volta, sta di fatto che il quesito è stato proposto 310 anni fa in un concorso, che risposero varie personalità di un certo calibro, tra cui i fratelli Bernoulli, Leibniz, e un certo Newton (che ha mandato la risposta anonima!), e che tutti trovarono la risposta giusta. Naturalmente, la loro dimostrazione era elementare[‡] e si basava su idee puramente geometriche. Nella figura che vedete, c'è un esempio di brachistocrona, che è conservata nel Museo di storia della scienza di Firenze.

La brachistocrona

[‡] Elementare non significa affatto banale, significa che usa strumenti semplici, che possono essere allo stesso tempo molto ingegnosi.

Ma per problemi più complicati l'approccio geometrico non funziona più. D'altra parte, come ha detto un matematico molto famoso, ogni fenomeno in natura obbedisce a una regola di massimo o di minimo. Pertanto molti problemi interessanti possono essere affrontati e risolti se si mostra che esiste il minimo di un certo funzionale. Stabilire l'esistenza del minimo per classi ragionevolmente ampie di funzionali non è cosa semplice: come ha fatto vedere il problema appena descritto, lo spazio dove si deve cercare la soluzione è uno spazio di *curve*, quindi in genere infinito dimensionale.

La matematica ha inventato dei teoremi astratti che dicono che se una funzione con certe caratteristiche è definita su uno spazio che ha altre caratteristiche, allora esiste il minimo. Le "caratteristiche" di cui ho parlato prima sono proprietà dette topologiche, e sta alla nostra fantasia e bravura trovare gli spazi adatti e le strutture topologiche giuste per poter applicare i teoremi astratti[§]. Una procedura ampiamente utilizzata. oramai standard, che questi strumenti suggeriscono è la seguente[¶]: L'intuizione, ad esempio fisica, suggerisce di cercare la soluzione in uno spazio (ricordo, di solito infinito dimensionale), che per il momento indico con C. Però può succedere che C non abbia le proprietà topologiche che servono. Allora si considera uno spazio più grande, chiamiamolo A, che contiene C ed ha le proprietà topologiche giuste. Nell'insieme A siamo capaci di trovare la soluzione per una famiglia ragionevolmente grande di problemi! E la storia non finisce qui, anzi in molti casi è ora che viene il bello. Perché infatti abbandonare la nostra vecchia intuizione? Ecco che allora, con certe tecniche, possiamo cercare di dimostrare che la soluzione che abbiamo trovato sta davvero nell'insieme di partenza C! Si potrebbe andare avanti parecchio, per illustrare la bellezza ed altre sfaccettature di questa idea straordinaria. Ma quel che ho detto basta a capire che questa è una storia davvero interessante con un messaggio filosofico/psicologico profondo.

Se cerchi delle cose, nei posti dove ti aspetti che siano, spesso non le trovi. Prova ad allargare i tuoi orizzonti, cercale in un

[§] La topologia è una *sovrastruttura* che inventiamo noi per ottenere certi risultati, non è una caratteristica insita nel problema.

[¶] La chiamo standard, ma sia ben chiaro che è un'idea assolutamente formidabile.

mondo più vasto. Forse le troverai, e scoprirai che sono dove le cercavi. Ma *senza una visione più ampia*, non le avresti potute trovare.

Ripeto, a me sembra un'idea straordinaria. E personalmente non sarei stato capace di pensare una cosa simile, se non me l'avesse suggerita la matematica.

E allora, perché non far capire anche a chi la matematica non la frequenta tutti i giorni che questa è una disciplina piena di belle idee, che potremmo utilizzare anche nel nostro pensare quotidiano, e che ci può far riflettere sulle cose della vita, esattamente come una bella poesia?

Questo mio libro è nato esattamente con questo scopo: provare a spiegare a qualcuno, che non è addentro alla matematica, ma che ne ha un minimo di curiosità, che questo è un mondo pieno di idee. Ho incluso paragrafi che contengono un certo numero di definizioni, esempi e risultati sotto forma di proposizioni. Che sono quindi un po' più pesanti da leggere di quelli completamente discorsivi. Ma sono convinto, ed è la sfida che mi sono posto accingendomi a scrivere questo libro, che anche chi non ha familiarità con le formule, può, senza lasciarsi spaventare, limitarsi a *guardarle*, e contemporaneamente concentrarsi e fare un piccolo sforzo per capire i concetti. Che cerco sempre di spiegare il più chiaramente possibile, perché penso che tutte le idee che ho voluto raccontare possano essere spiegate e capite anche senza entrare nel dettaglio matematico.
Se qualcuno, leggendo questo mio libro, scoprisse che è vero che la matematica offre l'occasione di *pensare*, e che i tecnicismi possono essere superati per arrivare alle vere idee, allora avrò raggiunto lo scopo.

Con gli anni, sono diventato ottimista: sono certo che quel qualcuno esiste.

Ogni introduzione finisce con qualche ringraziamento, a meno che uno non li metta in fondo, cosa che non intendo fare. In realtà, non voglio neanche mettermi a ringraziare qualcuno, perché dovrei citare troppe persone. Ma faccio un'eccezione per Geraldine, autrice dei disegni degli intermezzi, Marina e Paola, che hanno direttamente contribuito alla realizzazione del libro.