Prefazione

Difficilmente qualcuno si azzarda a dire che la matematica sia inutile, anzi. Allo stesso modo, è diffusa l'impressione che sia meglio evitarla, e che siano gli altri, possibilmente, ad occuparsene. Per molto tempo, inoltre, i matematici hanno fatto davvero poco per sforzarsi, da un lato, di rendere più accessibile la loro materia, dall'altro, per evitare di incoraggiare la leggenda del matematico un po' pazzo, spesso con la testa tra le nuvole, magari che borbotta tra sé su un autobus, o che esce di casa vestito in modo stravagante. Per fortuna le cose a volte cambiano, e in questo caso ci pare davvero che stiano cambiando in positivo. Per prima cosa la comunità matematica ha preso coscienza che è un *dovere irrinunciabile*, nella società moderna, sforzarsi di far capire anche agli altri il lavoro che si fà la sua utilità sociale, i suoi obbiettivi. Secondariamente, anche i matematici hanno cominciato a capire che provare a divulgare, in modo rigoroso ma accessibile, quello che si fa nella comunità scientifica, non solo è importante, ma può anche essere una parte della professione altrettanto piacevole di altre. Non sta ovviamente a noi cercare di analizzare sociologicamente perché le cose stanno cambiando, perché in questo periodo storico i matematici e la matematica interessano più di prima. Noi vogliamo qui solo sottolineare il ruolo delle riviste, poche ma significative, di diffusione della Matematica, sia tra coloro che di questa disciplina ne hanno fatto una professione, sia tra i curiosi, che sono forse di più di quel che comunemente si immagina.

Tra queste riviste, e lo diciamo con il giusto (e crediamo giustificato) orgoglio di due che lavorano da tempo nella sua redazione, figura certamente la *Lettera Matematica Pristem*, che, uscita con un primo, sperimentale numero nel Marzo 1991, è arrivata oggi al numero 75, e ci pare non abbia nessuna intenzione di andare in pensione. Nella *Lettera* si parla ovviamente di matematica, ma non solo. Ci sono articoli di attualità, storici, dibattiti, interviste, discussioni. C'è anche dell'altro: la *Lettera* è una rivista piacevole da tenere in mano, perché è molto curata, perché ci sono sempre figure scelte con gusto, perché è fatta con grande passione.

Questo libro nasce da un'idea della redazione. Perché non raggruppare e riproporre un campione di alcuni articoli di contenuto più spiccatamente matematico? Ci è sem-

brata una buona idea, ed è in questo libro che la proponiamo.
Naturalmente è necessario avere dei criteri di scelta degli articoli. Ci rendiamo conto che i nostri sono in parte arbitrari (esistono, per esempio, anche esigenze editoriali!), ma crediamo comunque di essere riusciti a fare una selezione sufficientemente rappresentativa e significativa dei contenuti della rivista.
Vogliamo, prima di presentare ogni articolo in poche righe, fare un paio di osservazioni di carattere generale. Prima di tutto, gli autori (che ringraziamo per la loro disponibilità) sono diversi, e quindi *lo stile di presentazione e il linguaggio,* nei vari articoli sono spesso differenti: questo è una ricchezza, speriamo. L'altra osservazione, probabilmente davvero *eretica*, è che secondo noi non è necessario capire nei dettagli tutta la matematica presente in ogni articolo. Lo ammettiamo, stiamo parafrasando una frase di J.F.Nash Jr, che disse una volta in un suo lavoro (scientifico, non di divulgazione!), che in fondo capire tutte le parti più tecniche non era essenziale, che quel che davvero conta è cercare di catturare le *idee*. Ed ecco che compare il *filo conduttore* che attraversa tutto il libro. Noi siamo convinti, e ci piacerebbe con questo libro portare una piccola prova del nostro convincimento, che la Matematica debba essere e sia principalmente una storia di *idee*: ci sentiamo eretici perché la convinzione comune è che la matematica sia soprattutto calcolo, ma questo è estremamente riduttivo. C'è anche calcolo, molto calcolo, c'è formalismo, ma ridurre la matematica a questo sarebbe davvero distruggere una parte importante della genialità del cervello umano. Che può amare anche un'enigmistica di altissimo livello, ma la Matematica è altro.
E ora, qualche parola sui singoli articoli, che cerchiamo di raggruppare, almeno in parte.
Partiamo dal contributo di colui che certamente può a buon diritto essere definito uno dei più geniali matematici italiani, e non solo italiani, del secolo scorso: Ennio De Giorgi. Che ci parla del valore della matematica non tanto dal punto di vista della sua utilità scientifica, quanto del suo valore sociale. Come era nel suo carattere di persona aperta e umile nella sua grandezza, ci parla di matematica come efficace mezzo di comunicazione tra le persone, e come disciplina che, non richiedendo grandi tecnologie, è aperta anche ai contributi dei meno fortunati dal punto di vista economico, purché dotati di talento. All'articolo di De Giorgi vogliamo associare il contributo di Vinicio Villani, che parla, da grande maestro sempre attento alle questioni di didattica, di come l'insegnamento della matematica delle scuole dovrebbe cambiare a causa dei forti mutamenti della società umana. Alcuni esempi concreti da lui proposti indicano alcune direzioni di approfondimento molto interessanti. Un articolo che si riallaccia a questo è certamente quello di Lorenzo Robbiano, che ci mostra come anche la matematica *elementare*, cioè quella insegnata nelle scuole, può portare a problemi veramente interessanti, se riletta in chiave moderna, e cioè tenendo conto che abbiamo oggi uno strumento straordinario mai avuto prima, il calcolatore. Quanti profondi problemi, *intellettualmente affascinanti*, ci ha portato questa evoluzione del regolo degli ingegneri! Segno che avere paura delle novità (la calcolatrici fanno sì che gli studenti non imparino più le tabelline...) è proprio una sciocchezza: le novità vanno gestite, e sono spesso fonti di sviluppi straordinari. C'è poi un gruppo di

articoli che parlano di temi classici e astratti, ma sempre di interesse assolutamente attuale e inesauribili fonti di riflessioni non solo matematiche. Tra questi annoveriamo il contributo di Gabriele Lolli, un articolo connesso a un suo intervento al convegno Pristem: *Esistono rivoluzioni in Matematica*?, tenutosi a Milano presso l'Università Bocconi nel Marzo 1995. Ci parla di quella storia straordinaria che è la nascita della teoria sugli insiemi, una rivoluzione culturale che ha influenzato profondamente la storia della Scienza poco più di un secolo fa. In questa linea possiamo leggere anche il lavoro di Stefano Leonesi, Carlo Toffalori e Samanta Tardini, che ci portano, con uno stile efficace e accessibile a tutti, attraverso alcuni dei più celebri paradossi e problemi matematici che a nostro avviso dovrebbero davvero essere spunto per riflessioni (per esempio a scuola nelle ore di filosofia) che vanno molto al di là del puro aspetto matematico: citiamo come esempio la storia dell'assioma della scelta, che rappresenta certamente un crocevia del modo di pensare matematica. Ovviamente non si può toccare un tema simile senza parlare della persona che, vissuta nel secolo scorso, è stata quella che con i suoi risultati ha provocato il più grande cambiamento nel modo di fare e pensare matematica: parliamo ovviamente di Gödel, cui è dedicato l'articolo, scritto in forma dialogica, di Roberto Lucchetti e Giuseppe Rosolini, che non a caso hanno avviato una curiosa collaborazione (sono due tipi stravaganti. . .) proprio nel bar di in cui hanno materialmente iniziato la chiacchierata qui riportata; Gödel è protagonista assoluto anche nel lavoro di Giovanni Sambin, che spiega una cosa che crediamo dovrebbe essere molto più incisivamente parte della cultura che dà la scuola: nemmeno il mattone essenziale del pensare matematico e non solo, e cioè *la logica*, è qualcosa di univoco, universale, esente da *critica*; esistono al contrario molte logiche, e capire che questo è inevitabile persino in qualcosa che abbiamo sempre pensato fosse immutabile e universale, dovrebbe portare come ovvia conseguenza che la diversità di opinioni (purché bene e educatamente argomentate) è una *ricchezza* del nostro modo di pensare, e che quindi la *tolleranza* (un concetto che ci ha già enunciato De Giorgi) è una forma di pensiero che la matematica dovrebbe contribuire a diffondere. E sempre sul tema della varietà della matematica, l'articolo di Stefania Funari e Marco Li Calzi ci ricorda come una cosa apparentemente semplice come dividere due numeri interi non è stato fatto sempre nello stesso modo, e quindi che non esiste un *unico* modo possibile per fare le cose: non vogliamo qui sostenere che l'algoritmo che si insegna ai bambini nelle Scuole Elementari non sia il più efficiente, vogliamo solo suggerire che forse, se a questa sistema si è giunti dopo averne provato molti altri, allora è normale che qualcuno trovi difficoltà ad applicarlo, almeno inizialmente, e che magari far vedere ai bambini che una divisione si può fare in modi diversi può stimolare curiosità. Il personaggio più citato nei nostri articoli è Kurt Gödel, e la cosa non sorprenderà nessuno, ovviamente. I suoi risultati, così apparentemente astratti, hanno avuto una ricaduta incredibile anche su questioni molto "concrete": sono infatti la radice di questioni molto profonde legate ai fondamenti della scienza dei calcolatori Alcune di tali questioni sono trattare nel lavoro di Vieri Benci, che immagina due studenti (due bravi studenti, aggiungiamo noi. . .) che parlano di eventi casuali, di complessità algoritmica, di macchine di Turing, di informazione: il tutto con un linguaggio accessibile e che suscita curiosità di approfondire certe tematiche, una qualità che ogni buon

articolo dovrebbe avere.
Presentiamo poi alcuni contributi legati alle applicazioni della matematica. Il primo è quello di Bruno Betrò, che spiega in maniera efficace alcuni aspetti interessanti del Calcolo delle Probabilità: non c'è bisogno che diciamo noi qui quante cose della nostra vita quotidiana sono in qualche modo governate da eventi probabilistici, e quanto sia importante fare attenzione a tutta una serie di *false credenze* che sembrano invece molto diffuse: basta pensare a tutti gli imbrogli connessi ai giochi d'azzardo (giocate il 78 sulla ruota di roma perché è fortemente ritardatario ...) Proponiamo poi l'invito alla crittografia di Renato Betti, che ci fa toccare con mano come una matematica ritenuta da sempre "inutile" (sebbene molto affascinante) e astratta come la teoria dei numeri possa improvvisamente e inaspettatamente diventare la base teorica essenziale per applicazioni che oggi pervadono le nostre attività quotidiane: il mondo sarebbe diverso se improvvisamente non potessimo più utilizzare la tecnologia che sottosta la crittografia. Siamo arrivati ai lavori che trattano applicazioni forse meno note al grande pubblico, ma che hanno oggi un'importanza notevole. Partiamo con il contributo di Piergiorgio Odifreddi, che ci parla di sistemi di votazioni, e che illustra in maniera efficace come non esista e non possa esistere *la* regola per ottenere la democrazia "perfetta": il risultato fondamentale in questo senso è il teorema di Arrow, che ha avuto nelle Scienze Sociali lo stesso effetto che avuto per i logici e i matematici il teorema di incompletezza di Gödel. Accanto a questo contributo troviamo il lavoro, che qui appare per la prima volta, di Fioravante Patrone, che ci parla di Teoria delle Decisioni e dei Giochi (che rappresentano la parte delle decisioni prese da più persone contemporaneamente, le quali con le loro azioni influenzano anche i risultati degli altri). Un campo relativamente nuovo, e in decisa crescita. Se le prime applicazioni erano pensate per decisori umani, oggi alcune parti di queste teorie si applicano al comportamento delle specie animali, e, forse soprendentemente, dei computers.
Chiudiamo con altri due inediti, di cui siamo autori. Il primo, di Ciro Ciliberto e Enrico Rogora, è certamente sorprendente per i non addetti ai lavori. Che matematica c'è dietro la biologia, la genetica? Se chiedete questo a non esperti, probabilmente vi risponderanno che quella del Liceo dovrebbe bastare. Forse, qualcuno che ha visto un po' di matematica all'Università potrebbe intuire che *equazioni differenziali* potrebbero essere utilizzati in modelli, ad esempio evolutivi, che trattano di animali. Ma l'algebra, quella materia così astratta che qualcuno vorrebbe mettere in un canto persino in curricola spiccatamente matematici? Che errore([1])! Già Robbiano ci aveva messi sull'avviso; per dimostrare automaticamente teoremi al calcolatore l'algebra è strumento essenziale: qui Ciliberto e Rogora mostrano inequivocabilmente che una sofisticata ricerca nel campo della filogenetica può con grande profitto utilizzare strumenti algebrici astratti e raffinati. L'ultimo articolo non a caso si intitola "Una bella storia matematica": la sua ambizione è di mostrare che la matematica è anche (soprattutto?) una storia di idee, a volte così belle da essere espressioni artistiche, come un bel quadro e una bella musica, che possiamo apprezzare e ammirare anche senza

([1]) A scanso di equivoci, ci teniamo a dire che queste frasi sull'algebra sono state scritte da R. Lucchetti, analista, non da Ciliberto, agebrista...

conoscerne esattamente i dettagli, come davanti a un quadro contemporaneo, in cui forse non siamo in grado, senza essere esperti, di capire tutte le finezze tecniche, ma che può darci emozioni come una grande pittura classica.

1

Gödel al bar
R. Lucchetti e G. Rosolini

Un Mantovano che vive e lavora a Genova, un Genovese che vive vicino a Como e lavora a Milano. Dove si incontrano? Di solito al bar. Dove si mettono a parlar delle cose più svariate. Alcune classiche, come i figli o il calcio, altre più particolari, come il Festivaletteratura di mantova o quello della Scienza di Genova, i giochi matematici, o proprio di matematica. Matematica da bar, s'intende. Quello che segue, un dialogo nato spontaneamente un 31 Dicembre in un bar di Albaro, è uno dei primi che hanno fatto assieme.

A pensarci bene i risultati più importanti di Gödel suonano tutti sostanzialmente ovvi. Prendi il teorema di incompletezza: esistono affermazioni indecidibili sui numeri naturali, che non si possono dimostrare, ma che non si possono neppure confutare. Per forza deve essere così;

con un numero finito di premesse, in un numero controllabile di passi, come si fa a "raggiungere" tutte le proposizioni vere?

Per fortuna che è finita così! Altrimenti cercare la dimostrazione di un teorema diventa solo un gioco di pazienza, e forse di abilità, ma senza invenzione alcuna: questo avrebbe svilito il ruolo dei matematici e del loro pensiero!

Considera però come negli anni venti del secolo passato i matematici erano quasi più convinti del contrario. Nell'introduzione del *Uber formal unentscheidbare Sätze der* "Principia Mathematica" *und verwandter Systeme I* si intuiscono chiaramente le preoccupazioni di Gödel di spiegare al suo lettore quanto il risultato che ha dimostrato sia accettabile e sensato; dichiara addirittura che l'argomento centrale del suo lavoro si riduce al paradosso del mentitore—quello che dice "Io sto mentendo"—e che il lettore non si deve lasciar disturbare da possibili difficoltà tecniche, ma consideri piuttosto che le regole del ragionamento costituiscono un calcolo algebrico che funziona né più né meno come quello dell'aritmetica.

D'altra parte, considera che Gödel stesso aveva fuorviato i matematici del suo tempo col suo primo risultato, che è di completezza (della logica del prim'ordine)! Con la mente geniale che aveva, ho il sospetto che l'abbia fatto apposta, che avesse già in mente che per l'aritmetica non avrebbe funzionato.

Già, era ovvio pure quello. Era così ovvio che tutti lo usavano già implicitamente: un enunciato è dimostrabile se e solo se è verificato in tutti i modelli della teoria. In effetti, la dimostrazione prodotta da Gödel è estremamente accurata: basandosi sulla forma dell'enunciato, esibisce una dimostrazione formale per esso oppure, in un modo che sembra quasi esplicito, un modello che non lo verifica. Bisogna fare molta attenzione perché le denominazioni dei primi due teoremi di Gödel possono risultare fuorvianti; il suo primo risultato si chiama "di completezza della logica del prim'ordine", perché stabilisce che, per un dato enunciato A, i casi sono due: A è un teorema oppure si può costruire un modello che rifiuta A. La situazione è descritta *completa*mente.Nel successivo teorema di "*in*completezza dell'aritmetica", Gödel dimostra che non si può fare meglio di quanto aveva dimostrato nel primo teorema, cioè che ci sono teorie per cui non è possibile in generale rafforzare la mancata dimostrazione di A ad una dimostrazione che la negazione $\neg A$ di A è un teorema. Ma questa volta, la parola "incompleto" si riferisce ad una singola teoria logica del prim'ordine, l'aritmetica appunto. Quando si considera una teoria - ad esempio quella dei numeri, o quella degli insiemi o quella dei gruppi o quella degli spazi di Hilbert - ci si immagina spesso un esempio standard, ma poi le dimostrazioni si fanno in generale, senza fare riferimento all'esempio particolare che ci prefiguriamo in testa.

Dunque c'è una differenza incolmabile tra verità e dimostrabilità: è bellissimo che in matematica si sia in grado di dimostrare esattamente quali sono i propri limiti. La matematica (meglio, quella grande parte di matematica che richiede l'uso dei numeri e del principio di induzione) non è in grado di assicurare la propria coerenza; però è in grado di *misurare* come non ci riesce. La misurazione avviene attraverso la formalizzazione dei "processi finiti" (meglio finitistici) cui aveva fatto riferimento Hilbert: un processo è finito se può essere eseguito in tempo finito seguendo istruzioni finite. Gödel determinò matematicamente il concetto vago espresso sopra definendo le funzioni *ricorsive*. Non vuol dire che si usano espressioni ricorrenti! Il concetto di funzione ricorsiva fissa l'intuizione di funzione calcolabile meccanicamente: quello che oggi fanno i computer.

L'aritmetica non riesce ad assicurare la propria coerenza, e non ci riesce infinitamente tanto. Se aggiungiamo la richiesta di coerenza come assioma, allora la nuova teoria—l'aritmetica con il postulato di coerenza per l'aritmetica—sa dimostrare la coerenza dell'aritmetica (facile: per assioma!), ma non è in grado di dimostrare la *propria* coerenza! E così via, aggiungiamo a questa nuova teoria il postulato di coerenza: l'incapacità di dimostrare la propria coerenza rimane. E Gödel, per fare questa catena di teorie, tutte troppo deboli per dimostrare la propria coerenza, ha dimostrato un teorema solo.

Il singolo teorema dimostrato da Gödel si riferisce non tanto alla teoria dei numeri—come di solito viene menzionato—, ma ad una qualunque estensione della teoria dei numeri i cui assiomi siano riconoscibili meccanicamente, il che significa che c'è un processo finito (o meglio, una funzione ricorsiva) che calcola se una formula è un'assioma oppure no. Praticamente tutte le teorie che usiamo in matematica sono riconoscibili meccanicamente; però è proprio quello il limite da superare se si vuole sperare di arrivare a una teoria capace di verificare la propria coerenza.

È un risultato bellissimo: un teorema gigantesco! Sarebbe stato il più importante teorema del XX secolo se Wiles non avesse dimostrato l'ultimo teorema di Fermat.

A parte che questa è una sciocchezza, ti prego di non cominciare con queste storie del risultato più importante del secolo... Lo so che è una mania di tutti gli uomini, quella di fare sempre classifiche, e i matematici non fanno eccezione. Ma se devo far classifiche preferisco discutere se è meglio Milito, quello che ha giocato nel Genoa, s'intende, o Del Piero, anche se per me non c'è discussione, ovviamente!

Ho capito, torniamo al teorema di incompletezza: sarà ovvio come abbiamo detto, ma ha cambiato radicalmente il modo di riflettere sulla matematica, che non è più quella zona franca di sicurezza dove tutto è noto con certezza, dove un enunciato è dimostrabile oppure confutabile. Non è così: non c'è speranza di trovare *tutte* le proprietà numeriche "vere" di per sé - che non ha senso -, ma anche di inventare nuove astrazioni, accettabili e utili per dimostrare teoremi che potranno poi essere applicati per spiegare in astratto eventi nella realtà. Gli assiomi di Peano per la teoria dei numeri sono molto ragionevoli e utili, ma saremo sempre alla ricerca di nuove proprietà utili per vedere il quadro più compiutamente, in un modo che sarà sempre relativo e non potrà diventare assoluto. Il teorema di incompletezza di Gödel ha trasformato totalmente l'immagine usuale e preconcetta della matematica: è necessario accettare il fatto che la matematica non sia una scienza esatta! E non potrà mai esserlo. Questa certezza di insicurezza offre al matematico un punto di vista sul sapere scientifico stupefacente—assolutamente impensabile fino agli anni venti del secolo passato. E si allinea con i problemi di indeterminazione in fisica.

A questo proposito, ti dirò che a me in effetti è capitato che più di una persona, magari laureata in una disciplina scientifica, mi abbia chiesto che senso ha far ricerca in matematica, sottintendendo che in una scienza come questa tutto ormai dovrebbe essere scoperto. Credo che la responsabilità di questa credenza, che Gödel ha seppellito *per sempre* e che mi sembra comunque un po' folle, sia molto nostra, di come trasmettiamo le conoscenze matematiche.

Sono d'accordo, e dopo Gödel non abbiamo più scuse: dato che le teorie matematiche sono costruzioni arbitrarie, per nulla certificate dal mondo reale, è ora opportuno, diciamo pure necessario, operare con discrezionalità, concedendo il beneficio del dubbio all'interlocutore e permettendogli di discutere le scelte di definizioni e teoremi.

Cambiando discorso, anche il suo risultato che, supponendo coerente l'assiomatica della teoria degli insiemi di Zermelo-Frænkel, se ad essi si aggiunge l'assioma di scelta, la teoria rimane coerente, è sostanzialmente ovvio: l'assioma di scelta vale banalmente per gli insiemi finiti; inoltre, ogni volta che si definisce un nuovo insieme a partire da insiemi già definiti e ben ordinati, si fa attenzione a definire anche un buon ordinamento su esso. Dato che gli insiemi che si usano dovranno per forza essere definiti, tutti questi potranno essere ben ordinati. Questo assicura la coerenza dell'assioma di scelta.

Però non dimenticare che Gödel riesce a definire il buon ordinamento in maniera *canonica*, oltre a chiarire quali siano i possibili modi per "definire un nuovo insieme". Per cui alla fine tutta l'architettura della costruzione è incredibilmente complessa.

A proposito, a me sembra inconcepibile che un matematico con profondi interessi per la filosofia quale era Gödel possa analizzare aspetti di matematica così profondamente diversi tra loro: passa dalla coerenza dell'assioma di scelta in teoria degli insiemi a problemi di logica intuizionista, passa da aspetti estremamente poco costruttivi dei fondamenti per la matematica alla teoria costruttiva per antonomasia.

Prendo la palla al balzo! Dunque, per quel che riguarda la logica intuizionista, è certamente facile la definizione della traduzione "per doppia negazione" della matematica standard (spesso denominata *classica*) nella matematica intuizionista. L'idea della traduzione è semplice, sta tutta scritta su un tovagliolo di carta:

$$\begin{array}{ccc} \text{mat.stand.} & \rightsquigarrow & \text{mat.intuiz.} \\ A & \rightsquigarrow & \neg\neg A \end{array}$$

La matematica intuizionista è un po' diversa dalla matematica standard in quanto prevede che una condizione di esistenza sia verificata esplicitamente. Nel 1893, Hilbert fissava molto precisamente il significato di esistenza in matematica: un oggetto matematico esiste quando le condizioni che lo definiscono non sono contradditorie. In altre parole, l'esistenza di un oggetto con certe proprietà è assicurata dimostrando che è impossibile che tutti gli oggetti non verifichino le condizioni richieste. In matematica intuzionista, questa *possibilità* di esistenza non basta: bisogna esibire esplicitamente la costruzione dichiarata. Per esempio, si vuole dimostrare che "esiste un numero razionale che si scrive come potenza di due numeri irrazionali". Si suppone il contrario, cioè che nessun numero razionale si scriva come potenza di due numeri irrazionali; perciò la potenza $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ non è razionale. Si considera ora $\left[\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right]^{\sqrt{2}}$: è la potenza di due numeri irrazionali ed è razionale ($= 2$), che è assurdo in base all'ipotesi fatta. Dunque, *non è vero che non è vero che* esiste un numero razionale che si scrive come potenza di due numeri irrazionali - sembra uno *scioglilingua*, ma questo è lo scheletro delle dimostrazioni per assurdo.

Infatti il matematico standard conclude la dimostrazione dicendo che le due negazioni si elidono e ottiene quanto desiderato: ha dimostrato che esiste un numero razionale che si scrive come potenza di due irrazionali, ma è chiaro che *non sa quale sia* questo numero razionale. Dalla dimostrazione sembra ragionevole aspettarsi che il numero sia 2, ma per *esserne certo* deve dimostrare che $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è irrazionale - nella dimostrazione sopra si afferma questo fatto *sotto l'ulteriore ipotesi* che non ci siano potenze di due numeri irrazionali che danno un numero razionale. Quindi il matematico intuizionista si ferma prima del matematico standard: non ammette l'elisione delle due negazioni. Il teorema su cui concorda di conoscere una dimostrazione è lo scioglilingua.

Dunque, Gödel ha fatto vedere che un enunciato si dimostra in matematica standard (usando anche le dimostrazioni per assurdo) se e solo se la traduzione per doppia negazione dell'enunciato si dimostra in matematica intuizionista. Perciò, quando si comunica un teorema, dimostrato con metodi per assurdo, ad un intuizionista si deve anteporre una coppia di negazioni davanti all'affermazione che dimostra: la frase non cambia significato dal punto di vista classico dato che due negazioni consecutive si elidono, ma l'intuizionista accetta sicuramente la dimostrazione prodotta dal matematico classico con tutti passaggi logici decorati con scioglilingua di doppie negazioni.

Quindi ne consegue che la proprietà delle potenze di numeri irrazionali di prima appare molto meno importante al matematico intuizionista: non è vero che nessuna potenza di due numeri irrazionali è irrazionale. Però sarebbe un errore pensare che l'intuizionista ha dimostrato "un teorema meno interessante"! E' assolutamente lo stesso teorema, ma l'enunciato intuizionista mantiene traccia dell'insoddisfazione prodotta dalla dimostrazione e del fatto che il teorema richiede un miglioramento: determinare se $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ è realmente irrazionale.

Anche il risultato ottenuto da Gödel sulla traduzione per doppia negazione è bellissimo: lo si può rovesciare per leggervi un'informazione molto utile e poco nota. La matematica sviluppata secondo le regole intuizioniste è più precisa della matematica classica/standard. Grazie alla traduzione di Gödel, si vede che ogni connettivo standard viene con una copia intuizionista. Ad esempio, insieme al solito connettivo *disgiunzione* ce n'è uno intuizionista $\vee$i, insieme al solito quantificatore *esistenziale* $\exists$ ce n'è uno intuizionista $\exists$i. Questi sono strettamente legati proprio dalla traduzione per doppia negazione

$$A \vee B \iff \neg\neg(A \vee \mathrm{i}\, B) \qquad \exists x.D(x) \iff \neg\neg(\exists \mathrm{i} x.D(x))$$

e così via. Insomma, i connettivi classici servono per abbreviare affermazioni costruttive complicate!

Bello! Mi hai fatto capire che, grazie alla traduzione proposta da Gödel, la matematica intuizionista contenga tutti i risultati che si ottengono con la matematica classica - che un intuizionista presenta nella forma "non è vero che non..." -, ma contiene anche molti altri risultati che, in matematica classica, molto semplicemente non possono neppure essere espressi.

Ti faccio notare che la doppia negazione della tua ultima frase è una normale forma retorica della lingua italiana, non uno scioglilingua intuizionista! Comunque, un enunciato che assicura l'esistenza di un qualche oggetto matematico - nel senso di $\exists$i - contiene sicuramente una costruzione dello stesso, in modo che questa sia estraibile della dimostrazione; è molto di più di un'affermazione di esistenza classica che, molte volte, si limita ad assicurare che è impossibile non trovare esempi - però, se vuoi trovarne uno, devi solo provare e riprovare, e non sai *quando* lo troverai...

Quindi secondo il logico intuizionista può essere interessante dimostrare teoremi usando anche il metodo di dimostrazione per assurdo, ma occorre dare il corretto valore ad un enunciato: prendi il teorema di Zermelo sull'esistenza di una strategia vincente nel gioco degli scacchi. La dimostrazione non ti dà nessuna informazione su quale strategia giocare, ma ti assicura che ce n'è una. Ci sono giochi, come l'Hex, in cui il teorema di Zermelo, non costruttivo, è ancora più stringente che non nel caso degli scacchi. Nash ad esempio, ha dimostrato che nell'Hex vince sempre il primo che gioca. Poi quando giocava, anche per primo, gli capitava, non raramente, di perdere! E' chiaro comunque che sapere che la strategia vincente da cercare è del primo, orienta ed aiuta nella sua ricerca, anzi cambia proprio l'attitudine logico-mentale per affrontare il problema.

Tornando a Gödel, la sua interpretazione nell'articolo sulla rivista *Dialectica* rimane in ambito costruttivo: però questa è proprio complicata. In un certo senso, analizza in che senso l'intuizionismo sia effettivamente una proposta di matematica costruttiva; propone un metodo per estrarre informazione esplicita da una dimostrazione, fatta magari ricorrendo anche a procedimenti per assurdo di un certo tipo. Viene chiamata "interpretazione" anche se è più una traduzione, perché associa ad una affermazione in matematica intuizionista un'altra formula a struttura canonica che rappresenta un *gioco* a due, tra un *dimostratore* e un *confutatore*. Dimostrare l'affermazione data produce una strategia vincente per il dimostratore che gli permette di battere sempre il confutatore. E la strategia è molto simile ad un programma che realizza la costruzione suggerita nella dimostrazione. Però questa non è proprio una descrizione fedele dell'interpretazione in *Dialectica*: è molto più complessa di quanto ho descritto.

A me sembra che l'intuizione dietro all'interpretazione di *Dialectica* si riallacci al primo, grande risultato ottenuto da Gödel. Era stato lui a capire quanto grande era la separazione tra dimostrabilità e verità; con l'interpretazione di *Dialectica* si lancia dentro quella separazione per cercare che cosa possa mancare nel concetto comune di dimostrazione razionale, visto che questa si è rivelata insufficiente per assicurare la coerenza di una teoria così intuitivamente corretta come l'aritmetica.

È tardi, quindi vorrei tornare al tuo primo discorso. Sarà anche che i risultati ottenuti da Gödel sono ovvi, come dicevamo sin dall'inizio; però, prima che li dimostrasse, sembrava "ovvio" anche il contrario, addirittura quel contrario poteva apparire più rassicurante. Prova a pensarci:

- un asserto matematico è dimostrabile oppure confutabile; la pensiamo sempre così quando ci troviamo davanti un problema;
- un buon ordine dei numeri reali è inimmaginabile: l'assioma di scelta deve essere aggiunto come postulato;
- la matematica intuizionista utilizza meno principi della matematica standard: non può esserci modo per cui sia più utile.

Ehi, aspetta, anch'io ho le mie conclusioni. Intanto, direi che Gödel ha qualcosa in comune con Giotto, almeno secondo un bellissimo monologo di Giorgio Gaber. Dove si racconta che, al tempo di Giotto, tutti dipingevano i cieli *d'oro*. Cieli piccoli, cieli sempre più grandi, sempre più raffinati, ma tutti rigorosamente, implacabilmente d'oro. Eppure, almeno agli addetti ai lavori, sembrava che qualcosa non andasse. Anche il giovane Giotto, stella nascente della pittura, dipinge con maestria cieli d'oro sempre più belli. Però è inquieto, capisce che qualcosa non va. Comincia a viaggiare, si abbona ai giornali più *in*, parla e litiga ai congressi, consulta persino Umberto Eco... Risultato: un enorme, magnifico cielo tutto d'oro! Basta, basta: sfinito, se ne ritorna al suo campo, alle sue pecore, e dopo un po', si mette a disegnare su una pietra. Con le matite colorate *Giotto*, naturalmente (straordinario esempio di autoreferenzialità, senza bisogno di scomodare Gödel). Ad un certo punto, alza quasi per caso lo sguardo verso il cielo e mormora: boh, a me il cielo sembra *azzurro*. E da quel momento lo dipinge d'azzurro, il bestione ignorante! E tutti gli altri a dirgli: ma no, ma non vedi che tutti lo dipingono d'oro? Nulla da fare, lui continua a dipingerli d'azzurro, e piano piano... Con Giotto, i contemporanei ci hanno messo un po' a capire. Con Gödel, meno. Forse anche perché tra loro c'era von Neumann, di cui mi piace ricordarti la frase seguente, detta parlando di Gödel, e che mi sembra dovremmo dire ad alta voce a tutti coloro che credono che la matematica sia fatta di verità da sempre e per sempre: *Durante quel periodo, le mie vedute circa le verità assolute della Matematica cambiarono con una facilità umiliante, e cambiarono tre volte di seguito.*

Siccome voglio l'ultima parola, chiudo dicendo che forse la cosa più ovvia di tutte è che Kurt Gödel è stato un pensatore di straordinario coraggio, un gigante del pensiero, non solo matematico, che ha influenzato e influenza tuttora molto profondamente logica, filosofia, matematica e forse non solo.

Indice