Capitolo 1

La Matematica dei Giochi

1.1 Introduzione

Che cosa fanno i bambini non appena cominciano a interagire col mondo esterno? Cominciano a *giocare*. Che cosa accomuna l'umanità da sempre, gli antichi come i contemporanei? La passione per lo sport e per le "storie", sia in forma di favola, sia nelle loro rappresentazioni, come a teatro. C'è un filo comune che lega le due cose, il gioco da una parte, le storie dall'altra. Il gioco per il bambino rappresenta un allenamento, l'allenamento indispensabile per affrontare la vita. Le fiabe, il teatro ed il cinema invece sono una rappresentazione simbolica della vita stessa, attraverso la narrazione di fatti e storie. L'uomo da sempre ha bisogno di simboli, per esprimersi, esercitarsi, capire. Non a caso i bambini sono sempre molto seri, e molto concentrati, quando giocano. Riflettendo un attimo, ci rendiamo conto che il gioco propone, in maniera semplificata, problematiche simili a quelle che ogni essere umano si trova ben presto ad affrontare nella vita. Pensiamo in particolare ai giochi svolti da più persone: la teoria si occupa soprattutto di questi. Come possono essere descritti in maniera astratta? Un gioco è caratterizzato dalla presenza di *agenti*, i giocatori, da *regole*, che determinano che cosa sia possibile fare e che cosa invece è proibito, e da tanti possibili *esiti finali*, per ognuno dei quali è specificato che cosa ottengono i giocatori (nei casi semplici chi vince, o quando c'è pareggio). Naturalmente assumiamo poi che i giocatori preferiscano vincere piuttosto che perdere, e più generalmente che abbiano delle *preferenze* sui risultati possibili[1]. Ebbene, questa potrebbe essere la descrizione di quasi ogni possibile situazione in cui due o più individui si trovano a *interagire*. La specie uomo è sociale, gli uomini hanno bisogno gli uni degli altri, tutta la nostra vita ruota attorno ai rapporti interpersonali. Questo vale in famiglia, a scuola o nel lavoro, nei rapporti con gli amici, in una coppia o quando compriamo un oggetto, insomma vale praticamente sempre. Ecco perché il gioco rappresenta un allenamento.

[1] Questo significa che sanno ordinare i vari esiti: cioè dire per esempio che l'esito A è meglio di B, il quale a sua volta è meglio di C...

Giocare significa imparare a ragionare, a elaborare strategie, a inseguire scopi, a porsi obbiettivi e cercare di raggiungerli. Dal momento che la scienza si pone di studiare l'uomo e tutto quello che lo circonda, e dal momento che il modo migliore per procedere è quello di analizzare esempi, per imparare da essi e generalizzare, si capisce bene perché il gioco sia efficace per descrivere le più svariate situazioni. Nonostante questo, lo studio sistematico delle situazioni descrivibili come giochi è cominciato, nella storia della scienza, solo molto recentemente. La scienza da sempre si è occupata dello studio dei fenomeni naturali, mentre la ricerca sul comportamento umano, sulle sue motivazioni e i suoi fini, è stato piuttosto delegato ad altre forme di pensiero, soprattutto la filosofia e/o la religione. Anche l'economia, scienza abbastanza antica, è sempre stata trattata da un punto di vista qualitativo, con una descrizione sommaria dei fenomeni, senza analisi più quantitative e modelli rigorosamente matematici. Nel secolo scorso tutto questo è cambiato. Agli inizi del novecento nelle scienze c'era un'atmosfera di euforia: gli scienziati erano convinti che con i nuovi strumenti scientifici la conoscenza dell'uomo e il suo benessere sarebbero aumentati in maniera molto significativa. Naturalmente la visione di allora era troppo ottimistica, tuttavia dobbiamo proprio a questo clima filosofico la nascita di discipline nuove e lo studio più sistematico del *comportamento razionale*. Oggi siamo forse un po' disillusi rispetto agli obbiettivi troppo ambiziosi di allora, ma di quello spirito è rimasto il desiderio di sviluppare sempre più, anche in ambiti nuovi, strumenti scientifici, in particolare matematici, per analizzare il comportamento umano.
In questo capitolo cercherò di dare un'idea dei risultati di base della Teoria dei Giochi, la parte della Matematica che cerca di descrivere il comportamento umano nelle situazioni in cui più persone si trovano ad interagire. In effetti, Teoria delle Decisioni Interattive è il nome che oggi gli esperti utilizzano: un modo più appropriato, ma meno efficace forse, dal punto di vista comunicativo, per identificare questa parte della Matematica. I giochi e i semplici esempi che proporrò sono talmente ingenui da sembrare del tutto irrealistici; tuttavia non è possibile fare diversamente, perché la descrizione delle situazioni di interazioni tra agenti è molto spesso estremamente complicata, e richiede strumenti matematici anche sofisticati, nonché capacità di calcolo che in genere è inaccessibile alla mente umana. Ma questo non è un problema, perché anche gli esempi più semplici possono mettere bene in luce le tematiche di cui si occupa questa teoria affascinante.
Concludo questa introduzione osservando che occorre essere sempre consapevoli del valore di tale teoria. Mentre in certi casi la scienza è in grado di proporre modelli di precisione quasi assoluta (pensiamo ad esempio al fatto che già gli antichi non avevano difficoltà a fare previsioni astronomiche accurate, ad esempio prevedendo le eclissi), deve invece non essere mai dimenticato che il comportamento umano ben difficilmente (per fortuna!) può essere previsto con grande accuratezza. Quindi occorre fare attenzione a "credere" troppo fideisticamente ai risultati ottenuti. Tuttavia avere una teoria di riferimento, che ad esempio spieghi che cosa sia il comportamento *razionale* in certi casi, è sempre molto utile. Non solo, se è vero che il comportamento singolo spesso si allontana in maniera significativa da quanto la razionalità suggerirebbe, è altrettanto vero

che lo studio di fenomeni più generali, come ad esempio gli equilibri di mercato, si rivela, pur con numerose eccezioni, di solito piuttosto affidabile.

1.2 Alcuni esempi

In questo paragrafo vediamo una carrellata di esempi significativi e famosi. Servono bene per illustrare molteplici aspetti della teoria.

Esempio 1. *(Ospedali e interni).* Supponiamo che ci siano due gruppi di agenti, che indico con A e B, che devono accoppiarsi. Come esempio, studiato in letteratura, A potrebbe essere un gruppo di neolaureati in medicina, in cerca di posti da interni, disponibili nel gruppo B di ospedali. I medici hanno preferenze su quali ospedali richiedere, ma anche gli ospedali hanno preferenze sui neolaureati. Esiste sempre un modo "ottimale" per accoppiare medici e ospedali? E se ce n'è più d'uno, è possibile stabilire se un metodo è più favorevole di un altro per un determinato gruppo? In questo esempio la cosa forse più interessante è il fatto che già l'idea di "soluzione", e cioè di accoppiamento "ottimale", è evidentemente non ovvia. Altre applicazioni dello stesso modello: come distribuire gli studenti fra le varie Università, oppure, è l'esempio classico, come suggerire la formazione di coppie tra ragazzi e ragazze che vogliono mettersi assieme.

Esempio 2. *(Contrattazione).* La mamma chiama i suoi figli, Tommaso e Andrea, e dice che darà loro 100 Euro, da suddividersi come premio promozione; a condizione però che si accordino su come suddividersi la somma. Tommaso e Andrea si trovano dunque a *contrattare*: se non si mettono d'accordo non otterranno nulla. Non occorre elencare situazioni simili, nella vita quotidiana: in moltissime situazioni le persone contrattano, per i motivi più diversi. Probabilmente la nostra prima reazione, davanti a questo problema , è di pensare che sia banale, perché basta che si prendano 50 Euro a testa. Però questa soluzione è troppo ingenua. Ben inteso, una spartizione in parti uguali sarà la soluzione ottimale in molti casi, come probabilmente in questo esempio, ma non sempre. Se vogliamo ottenere il massimo della soddisfazione complessiva (in qualche senso da rendere preciso), è possibile che uno dei due sia felice con poco, e che per l'altro invece sia molto importante avere la maggior parte della somma.

Esempio 3. *(Dilemma del prigioniero).* Mamma Barbara chiama i suoi figli, Filippo e Niccolò, e dice loro: ognuno di voi deve dirmi se preferisce che gli dia 10 Euro, o che ne dia 100 al fratello. Come nell'esempio precedente, i due fratelli devono interagire, ma questa volta la situazione è un po' diversa: pur potendo parlare per mettersi d'accordo, Filippo e Niccolò sanno che eventuali accordi tra loro sono molto fragili: ognuno dei due potrebbe far credere all'altro di rinunciare ai 10 Euro per sé, in favore dei 100 per l'altro, ma poi chi garantisce che mantengano il patto? Infatti, mantenerlo per loro non è favorevole. Ovviamente, stiamo assumendo in questo caso che eventuali accordi tra i giocatori siano *non* vincolanti. Questa semplice storiella è una versione possibile del celeberrimo *dilemma del prigioniero*, paradigma di un numero incredibile di situazioni di tipo economico e psicologico, e che è stato applicato anche per spiegare il comportamento di certe specie animali in determinate situazioni: ne riparleremo.

Esempio 4. *(La pista dell'areoporto).* Supponiamo che l'aeroporto di una città decida di costruire una nuova pista perché tre nuove compagnie hanno deciso di atterrare in città. La prima ha bisogno di una pista di 1 km, il cui costo è c_1, la seconda di una pista di 2 km, il cui costo è c_2, la terza infine di 3 km, il cui costo è c_3. Naturalmente si ha che $c_1 < c_2 < c_3$, ma anche $c_2 < 2c_1$ ecc, perché il raddoppio della pista non implica l'automatico raddoppio dei costi, in quanto sono possibili le cosiddette *economie di scala*: per fare il secondo chilometro, ad esempio, non c'è bisogno del trasporto di costosi macchinari, già sul posto per la costruzione del primo. L'affitto stesso dei macchinari poi non raddoppia con il raddoppio dei tempi, perché contratti a lungo termine sono unitariamente più economici. Dal momento che sembra del tutto ragionevole costruire una pista sola, di 3 km, come dovranno essere suddivisi i costi tra le tre compagnie?

Esempio 5. *(Bancarotta).* Una società, che ha tre creditori, va in bancarotta, perché possiede un capitale pari a x, ma la somma dei suoi debiti è ben superiore. Come suddividere x tra i tre creditori, che vantano crediti diversi?

Esempio 6. *(Società per azioni).* Un problema che ha grande importanza è il seguente. Data una società per azioni, come stabilire il potere dei singoli azionisti? Questo è cruciale non solo al momento di spartire eventuali utili. Un aspetto importantissimo riguarda la proprietà (occulta, eventualmente) di una società. È ben noto che la legge spesso vuole impedire che una società abbia un padrone: caso tipico quando le sia affidato un bene di utilità pubblica (ad esempio, energia). Come stabilire se un dato azionista è il vero padrone della società? Certo, se ne possiede il 51% delle azioni ... ma ovviamente questo è un caso semplice. Ma se ne possiede invece il 10%? La risposta giusta è: *dipende.* Certamente spesso non lo è proprio. In certi casi tuttavia potrebbe accadere il contrario. Ad esempio se il resto delle azioni fosse equamente distribuito tra migliaia e migliaia di piccolissimi azionisti. È ben noto che aggregare consenso tra moltissime persone è molto difficile, per cui in pratica è davvero possibile che chi ha anche il 10% di una società abbia agli effetti pratici il potere di decidere da solo. Per un capitalista accorto potrebbe essere molto interessante avere il 10% di due società piuttosto che il 20% di una (a parità di investimento), perché così potrebbe anche aumentare molto la sua forza sul mercato. La teoria dei giochi propone degli *indici di potere*, adatti a quantificare la forza degli agenti in situazioni simili.

Esempio 7. *(Una votazione).* Tre politici devono decidere tra tre diverse alternative. Ad esempio, se costruire un nuovo ponte (alternativa A), se raddoppiare un tratto di autostrada (alternativa B), o utilizzare il capitale per ridurre il debito pubblico (C). Il sistema di preferenze dei tre è il seguente:

$$1) \qquad A \quad \succ \quad B \quad \succ \quad C,$$

$$
\begin{array}{lccccc}
2) & B & \succ & C & \succ & A, \\
3) & C & \succ & A & \succ & B.
\end{array}
$$

Quanto sopra significa che il primo preferisce l'opzione A, poi eventualmente la B, infine la meno preferita è la C. E così via, per il secondo e il terzo. Supponiamo anche che in caso votino tutti e tre diversamente il voto del primo sia decisivo. Che provvedimento passerà? Non è sorprendente che la teoria *non* dia una risposta univoca a questa domanda. Sarebbe strano il contrario. Però può chiarire certi meccanismi, non del tutto ovvi. Ad esempio, in questo caso dichiarare apertamente che si voterà il provvedimento preferito potrebbe non essere un'idea intelligente.

Esempio 8. *(La battaglia dei sessi).* Questo esempio, nella sua semplicità, è molto efficace, e altrettanto famoso. Può essere descritto così. Ci sono due novelli sposi, diciamo Cesare e Ilaria, che devono decidere dove passare la serata. Le alternative sono due: andare al cinema, oppure a teatro. Entrambi vogliono stare assieme, ma Cesare preferisce il cinema, Ilaria invece il teatro. Possiamo esemplificare la situazione nella maniera seguente:

$$
\begin{pmatrix} (10,0) & (-5,-5) \\ (-10,-10) & (0,10) \end{pmatrix}.
$$

La tabella precedente si chiama *bimatrice*. Come si legge? Una volta capite alcune convenzioni, non è difficile. Essa rappresenta un gioco tra due persone, e per convenzione il primo sceglie una riga, il secondo una colonna. La scelta contemporanea dei due individua una coppia di numeri: il primo rappresenta l'utilità del giocatore di riga, il secondo quella del giocatore di colonna. Nel gioco di quest'esempio, la prima riga (colonna) rappresenta la scelta da parte di Cesare (Ilaria) di andare al cinema. Vediamo di capire il perché della scelta dei numeri che troviamo nella bimatrice. Consideriamo ad esempio il caso prima riga-seconda colonna. Corrisponde alla scelta di Cesare di andare al cinema, e di Ilaria di andare a teatro. Questa situazione non è molto gradita ai due, che vorrebbero stare assieme. Quantifichiamo il risultato assegnando utilità -5 a entrambi. D'altra parte, è probabilmente meglio per loro essere da soli ma nel posto che preferiscono, piuttosto che soli e nel posto dove non volevano andare! Quindi a questo esito diamo utilità più bassa, diciamo -10 per entrambi. Infine diamo utilità 10 al giocatore che si trova in compagnia nel posto che preferisce, 0 se in compagnia ma nel posto preferito dall'altro. È importante osservare a questo proposito che la scelta dei numeri è abbastanza arbitraria: ciò che davvero conta è il *confronto* tra le utilità dei giocatori nei vari esiti possibili del gioco. Così qui è importante che l'utilità di Cesare sia massima quando l'esito è andare al cinema assieme, e che l'utilità di andare a teatro assieme, seppur minore di quella di andare entrambi al cinema, sia per lui superiore a quella delle situazioni in cui sono separati. Per questo avremmo potuto mettere 5 al posto di 10 o anche di 0, senza alterare il modello[2].

[2]Questa è un'ipotesi non del tutto ovvia. Stiamo infatti assumendo che non importa *l'intensità* del desiderio dei giocatori, ma solo l'ordine delle loro preferenze.

Esempio 9. *(Morra Cinese). I giochi a somma zero* rappresentano una classe importante di giochi. Sono quelli strettamente competitivi, nei quali se il primo giocatore preferisce la situazione finale A alla B, allora la preferenza del secondo è opposta. Si chiamano a somma zero perché in pratica si può supporre che in ogni esito la somma delle utilità sia nulla. Nei casi più semplici, il gioco prevede la vittoria dell'uno, e quindi la sconfitta dell'altro, oppure eventualmente il pareggio. In questi casi la bimatrice può essere sostituita da una *matrice*, tabella che riporta solo l'utilità del giocatore di riga: evidentemente quella del secondo è la stessa cambiata di segno. Ecco una matrice che rappresenta un gioco familiare alla gran parte dei bambini:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix};$$

si tratta di una rappresentazione possibile del gioco della *morra cinese*, in cui i due giocatori mostrano contemporaneamente una mano che, a seconda di come sono le dita, può rappresentare un sasso, un foglio di carta, o delle forbici. Il sasso spezza le forbici, che tagliano la carta, che avvolge il sasso: ogni mossa è vincente contro una mossa e perdente contro un'altra. Nella matrice di cui sopra, possiamo supporre che la prima riga (colonna) corrisponda alla scelta del sasso, la seconda delle forbici. Così ad esempio in corrispondenza della prima riga-seconda colonna troviamo 1, che indica il fatto che il sasso batte le forbici.

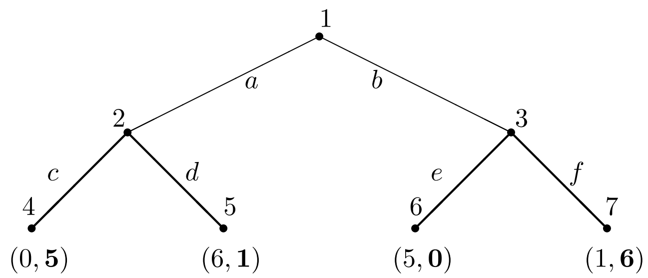
1.3 Giochi in Forma Estesa

Abbiamo visto nel paragrafo precedente un modo efficace di descrivere un gioco: si tratta di utilizzare tabelle, chiamate bimatrici, oppure matrici se il gioco è a somma zero. Non è certamente questa l'unica descrizione possibile del gioco: esiste una forma che per certi versi è ancora più efficace. Si tratta di utilizzare l'idea di *grafo*, e per meglio capire questo concetto basta illustrarlo con un esempio semplice. Prima però conviene mettere in evidenza quali sono gli ingredienti fondamentali di ogni gioco, e per farlo ci riferiamo agli scacchi, probabilmente il gioco più famoso al mondo. Poi vedremo un grafo che descrive la semplicissima situazione in cui ci sono due giocatori, che giocano in sequenza e hanno solo due mosse possibili. Per descrivere in maniera completa il gioco, occorre specificare:

- la situazione iniziale del gioco (la disposizione dei vari pezzi sulla scacchiera);
- le regole che determinano le possibili evoluzioni del gioco (chi deve fare la mossa, le mosse che ogni pezzo può fare, come "mangiare" un pezzo avversario e così via);
- i suoi stati finali (scacco matto, oppure tutte le situazioni che portano al pareggio);

- le preferenze dei giocatori sugli esiti possibili (in questo caso semplice si suppone, ovviamente, che il giocatore preferisca prima di tutto vincere, poi eventualmente pareggiare). Come già osservato, in generale le preferenze saranno ordinate per mezzo di numeri opportuni.

Allora nel nostro esempio, in cui i giocatori sono Alberto e Laura, la situazione iniziale prevede che Alberto debba scegliere tra due opzioni, diciamo *essere simpatico*, oppure *essere antipatico*[3]. Una volta che Alberto ha espresso la sua scelta, tocca a Laura fare una scelta simile. Ecco la descrizione per mezzo di un grafo.



Quello di sopra si chiama *albero del gioco*, e l'albero è un caso particolare di grafo. Abbiamo indicato con i numeri $1, \ldots, 7$ quelli che chiameremo i *nodi* dell'albero, e che rappresentano le varie situazioni del gioco; in particolare, 1 rappresenta la situazione, o nodo, iniziale, mentre $4, 5, 6, 7$ rappresentano i nodi, o situazioni, finali. Ogni nodo, esclusi quelli finali, è *etichettato* in modo da indicare quale giocatore deve fare la mossa a quel nodo: nell'albero di sopra per distinguere i giocatori sono disegnati con spessore diverso i *rami* uscenti dai nodi: Alberto ha uno spessore normale, Laura invece è in grassetto. Inoltre, il ramo di sinistra indica un comportamento aggressivo mentre quello di destra un comportamento gentile, per entrambi.

Ai nodi finali sono associate coppie di numeri, che indicano le utilità di Alberto e Laura in quella situazione. Dunque, se ambedue sono gentili Alberto ottiene 1 e Laura 6. E così via. Perché i termini aggressivo e gentile? Vediamo il caso di Alberto (per Laura vale lo stesso ragionamento): il suo comportamento gentile può far ottenere a Laura la massima soddisfazione possibile (**6**): a costo però di accontentarsi di 1, pur sapendo che tra gli esiti possibili uno gli farebbe ottenere 6. Prima di provare a chiederci se possiamo prevedere l'esito del gioco, occorre fare due osservazioni molto importanti:

1. Quel che importa ai giocatori è solo quel che loro otterranno. In particolare, la soddisfazione dell'altro viene presa in considerazione *solo* per cercare di capire come l'altro si comporterà: nel nostro esempio, non dobbiamo essere sviati dal fatto che Laura potrebbe voler essere gentile con Alberto per

[3] Userò anche i termini gentile e aggressivo.

altri motivi: ogni eventuale motivazione psicologica deve essere inglobata nell'utilità associata alle situazioni finali[4].

2. Nonostante le mosse a disposizione dei giocatori siano le stesse (al momento di decidere devono entrambi scegliere tra le due alternative: antipatico/simpatico), la loro situazione *strategica* è radicalmente diversa. Le regole del gioco infatti specificano che Laura decide *sapendo* che cosa ha deciso Alberto al momento precedente, e questo chiaramente cambia la sua situazione rispetto a quella di Alberto.

Il punto 2. precedente necessita di essere formalizzato, e l'idea è quella di utilizzare il fondamentale concetto di *strategia*: una strategia per Laura, e per ogni giocatore, è *la specificazione di un azione possibile in ogni nodo etichettato col nome del giocatore stesso.*

Nel nostro esempio dunque Alberto ha due strategie possibili, che coincidono con le mosse aggressivo/gentile, visto che deve decidere solo alla radice, ma Laura ha 4 strategie possibili:

1. essere gentile se Alberto è gentile, essere gentile se Alberto è aggressivo;
2. essere gentile se Alberto è gentile, essere aggressiva se Alberto è aggressivo;
3. essere aggressiva se Alberto è gentile, essere gentile se Alberto è aggressivo;
4. essere aggressiva se Alberto è gentile, essere aggressiva se Alberto è aggressivo.

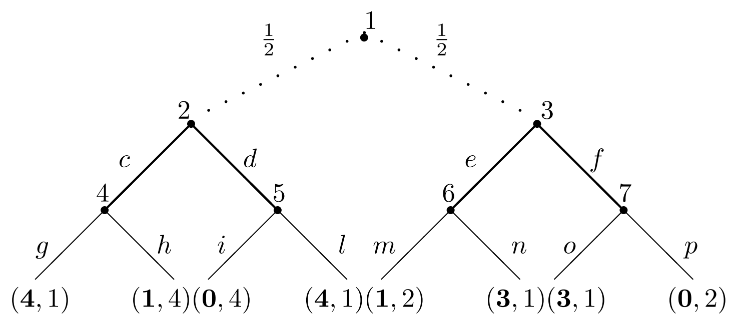
In realtà, osservando l'albero del gioco, ci conviene scrivere più semplicemente (ce,cf,de,df), per elencare tutte.

Pur con queste premesse, non è evidente quale sarà l'esito del gioco. A prima vista Alberto potrebbe scegliere il ramo a, nella speranza che Laura lo porti alla situazione finale che gli dà la massima utilità (6). Ma è credibile che questo succeda? Vediamo un metodo efficace e convincente per scoprire come giocatori intelligenti e razionali analizzano giochi come quello appena descritto, e di conseguenza tutti quelli con struttura simile.
L'idea consiste nell'analizzare che cosa decideranno i giocatori in ogni nodo in cui la scelta porta ad una situazione finale: nel nostro caso semplice, nei nodi 2 e 3. In 2, Laura sceglie il ramo c che le dà utilità (**5**), piuttosto che d, che per lei vale solo (**1**). Analogamente, a destra, sceglie f (Infatti **6**>**0**). Facile, no? L'analisi è resa ovvia dal fatto che, portando tali nodi ad un risultato finale, l'agente coinvolto è solo uno (Laura per noi), e quindi che cosa succede è chiaro a tutti: sceglie il ramo che le porta utilità maggiore! Un passaggio semplice, dunque, ma anche cruciale. L'ipotesi di intelligenza dei giocatori, che è sottintesa in tutta

[4]Questo è un punto molto importante da capire: tutti amano avere più soldi che meno, in generale. Tuttavia in un gioco è ben possibile che io preferisca avere un po' meno, a favore di un altro giocatore, per i motivi più diversi. In questo caso associerò al risultato con meno denaro un'utilità maggiore di quello in cui ottengo di più. Dunque è possibile osservare comportamenti "altruistici": il modello però prevede che questi debbano essere inclusi nelle preferenze dei giocatori.

la teoria, implica che Alberto sa benissimo che cosa sceglierebbe Laura in ogni circostanza (le utilità dei giocatori sono note a tutti). Quindi sa che se sceglie il ramo a ottiene 0, mentre se porta il gioco al nodo 3 ottiene 1. Dunque sceglie di essere simpatico, e lo stesso farà Laura[5].

La procedura utilizzata si chiama di *induzione a ritroso*. È chiaro che questo metodo ci permette di *prevedere a priori* l'esito di giochi di questo tipo, ed è anche un risultato intuitivo, almeno in parte, perché tutti abbiamo la sensazione che certi giochi debbano finire sempre esattamente allo stesso modo; un po' di esperienza ci convince ad esempio che nel famoso gioco del tris i due giocatori pareggiano sempre. Il passaggio successivo naturalmente riguarda il capire quali sono le caratteristiche di un gioco che ci permettono di utilizzare l'induzione a ritroso. Dal punto di vista della descrizione a parole, si capisce che possiamo applicare tale metodo in ogni gioco in cui ai giocatori sono note tutte le informazioni rilevanti. In altre parole, ogni giocatore al momento di decidere sa quale è stata la storia precedente del gioco, e quali sono tutti i suoi possibili sviluppi futuri. Dal punto di vista matematico, la cosa si esprime dicendo che a partire da un nodo qualunque e guardando solo quel segue da quel nodo, la struttura ad albero del gioco *non* cambia. Osserviamo che è anche possibile che qualche evento probabilistico sia coinvolto; la cosa importante è che poi il risultato dell'evento dovrà essere noto a tutti. Ad esempio, all'inizio il gioco potrebbe prevedere l'estrazione di una carta da un mazzo, ed avere poi sviluppi diversi a seconda che essa sia rossa oppure nera. Ecco un albero che presenta una situazione simile.



L'analisi del gioco non cambia molto dall'esempio in cui non ci sono eventi casuali. Possiamo osservare, ad esempio, che il giocatore che tira per secondo sceglie il ramo di destra al nodo 4, quello di sinistra al nodo 5, e così via. Facendo i calcoli, l'induzione a ritroso mostra che nel caso la sorte privilegi il ramo di sinistra, il primo giocatore avrà utilità pari a **1**, il secondo pari a 4, mentre nel caso del ramo di destra, le utilità saranno rispettivamente di **1** e 2. Le strategie dei giocatori sono *ce* per il primo giocatore e *himp* per il secondo.

[5]Questo è quel che ci interessa, però occorre precisare che la strategia di Laura prevede di essere aggressiva nel nodo 2, e simpatica nel nodo 4. Non ha poi bisogno di comportarsi aggressivamente, nel caso decidano davvero di giocare, perché il nodo 2 non viene raggiunto. Tuttavia Alberto sa che lei lo farebbe, e questo alla fine determina il fatto che Laura ottenga un risultato migliore di Alberto.

La cosa più interessante è valutare le utilità dei due, una volta che usano tali strategie: ebbene, il primo prende **1**) nei due casi, e quindi la sua utilità è **1**, mentre il secondo prende 4 a sinistra, 2 a destra, quindi la sua utilità è pari a 3. Questo non deve suonare paradossale: stiamo assumendo l'ipotesi, in certi casi non del tutto realistica ma certamente molto comune e forse inevitabile, del calcolo dell'utilità *in senso atteso*: guadagnare 2 o 4 con eguale probabilità è *la stessa cosa* che guadagnare 3 con certezza. In questo senso abbiamo abolito ogni incertezza: questo gioco, come il precedente, è *determinato*, nel senso che il suo esito è prevedibile a priori; giocatori intelligenti faranno sempre la stessa cosa, ottenendo inevitabilmente lo stesso risultato[6].

Concludiamo questo paragrafo sui giochi in forma estesa accennando solo al fatto che quanto affermato precedentemente, e cioè che l'induzione a ritroso "risolve" questi giochi ha una conseguenza molto sorprendente: dal punto di vista di questa teoria un gioco come gli scacchi non è molto interessante (come il tris) perché due giocatori della teoria terminerebbero le loro partite sempre con lo stesso risultato. È chiaro che questo risultato è teoricamente interessante, ma è anche ovvio che i giocatori della teoria sono, almeno in questo caso, molto idealizzati: non esiste e non esisterà mai un essere umano che possa disegnare l'albero del gioco degli scacchi per poi applicare l'induzione a ritroso[7]!

La teoria precedente non può evidentemente essere applicata ai giochi in cui sono previste mosse contemporanee[8]. È dunque necessario introdurre concetti nuovi. Si arriva così all'idea di gioco in forma strategica, e si divide la teoria in due filoni principali: la non cooperativa e la cooperativa. Nei prossimi paragrafi vedremo alcuni aspetti di entrambe.

1.4 La Teoria Non Cooperativa

I primi risultati di questa teoria riguardano i giochi *strettamente competitivi*, o a somma zero: la morra cinese ((Esempio 9)), la dama, gli scacchi, il tris ne sono esempi tipici. Sono i giochi più semplici da analizzare, perché gli interessi dei giocatori sono totalmente contrapposti, e quindi in un certo senso è chiaro che ottenere il meglio per sé è equivalente a cercare che l'avversario ottenga il meno possibile, e questo, come vedremo, semplifica l'analisi. Quando invece, e sono le situazioni più comuni, le utilità dei giocatori possono in certi esiti del gioco essere per tutti più alte che in altri (come nell'Esempio 3), possono nascere situazioni anche paradossali, più difficili in generale da trattare.
Dal momento che nel caso competitivo ogni forma di collaborazione è preclusa, perché gli interessi dei giocatori sono opposti, il primo concetto da tenere in considerazione è quello dei *valori conservativi* dei giocatori (detti anche i loro

[6]Che ottengano sempre lo stesso risultato sembra un po' difficile da digerire, visto che il guadagno finale dipende da una scelta iniziale casuale. Ma ricordo che questo va inteso in senso atteso.

[7]Oppure che possa farselo disegnare dal più potente dei computer.

[8]Possiamo considerare come contemporanee anche mosse che pur avvenendo in tempi diversi non sono note a tutti i giocatori: nel gioco della morra cinese Matteo può anche tirare per primo, l'importante è che Marina non sappia che cosa ha tirato!

livelli di sicurezza). Proviamo a capirne l'idea su un gioco in forma di matrice:

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Supponiamo che Emanuele debba scegliere una riga, Francesca una colonna e, ricordiamo, il coefficiente nella casella individuata è quanto Francesca paga a Emanuele (riceve, in valore assoluto, se il numero è negativo). Emanuele sa che giocando la prima riga potrebbe dover pagare 1 (se Francesca scegliesse la seconda colonna), con la seconda invece rischia di dover pagare 4, con la terza si garantisce un guadagno minimo di 3. Quindi con la terza riga può ottenere almeno 3, che quindi rappresenta il valore conservativo di Emanuele. Mettiamoci ora dal punto di vista di Francesca. Con la prima colonna rischia di dover pagare 8, con la seconda 4, con la terza 3. Giocando giudiziosamente dunque si può garantire di pagare non più di 3. Riassumiamo la situazione: Emanuele sa di poter garantirsi *almeno* 3, Francesca sa di avere il modo di pagare *non più* di 3: è dunque evidente che 3 rappresenta esattamente quel che Emanuele (che gioca la terza riga) riceve da Francesca (che gioca la terza colonna): ogni volta che due giocatori si troveranno a giocare la matrice precedente il risultato sarà quello. Dunque il gioco è determinato e Francesca ed Emanuele in pratica non lo giocano mai, perché non c'è nessun divertimento a giocare un gioco che finisce sempre allo stesso modo!
Per capire quel che abbiamo fatto, riscriviamo in termini un pò diversi i calcoli dell'esempio precedente. Riscriviamo la matrice nella forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Come abbiamo determinato la soluzione del gioco precedente? Dapprima abbiamo isolato i valori a_{12}, a_{21}, a_{33}, che rappresentano i valori minimi nelle righe $1, 2, 3$ rispettivamente. Abbiamo poi selezionato il più grande di questi valori (a_{33}), che rappresenta il livello di sicurezza di Emanuele, cioè il minimo che è in grado di garantirsi, con un comportamento razionale. Abbiamo fatto la stessa cosa per Francesca, con l'unica differenza che lei paga, e quindi dobbiamo tenere conto di un cambiamento di segno. Il valore conservativo per Francesca coincide con quello di Emanuele, ed il coefficiente a_{33}, che rappresenta la soluzione del gioco, verifica la proprietà:

$$a_{i3} \leq a_{33} \leq a_{3j},$$

con gli indici i, j che possono assumere valore $1, 2, 3$. Se indichiamo in generale con x una strategia del primo giocatore, con y una strategia del secondo, e con $f(x, y)$ il pagamento del secondo al primo, allora una soluzione del gioco è una coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ che verifica:

$$f(x, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \leq f(\bar{x}, y), \tag{1.1}$$

per ogni possibile strategia x del primo e y del secondo.
Riprendiamo un attimo l'Esempio 9 della morra cinese. Se calcoliamo i valori conservativi dei due giocatori, ci accorgiamo che sono differenti: -1 per il primo, 1 per il secondo. Questo significa che nel gioco della morra cinese entrambi i giocatori non possono garantirsi di più che ... perdere! In generale, si può dimostrare che il valore conservativo del primo è sempre *minore o uguale* al valore conservativo del secondo[9]. Dunque nei giochi in cui i due valori sono diversi, sembra che ci sia un problema. Ma per fortuna è così! Sarebbe stato veramente troppo contro la nostra intuizione scoprire che anche nella morra cinese esiste un modo infallibile per vincere[10]! È più ragionevole aspettarsi che *non* tutti i giochi che prevedono mosse contemporanee siano strettamente determinati. Tuttavia la teoria non si ferma qui, perché riesce a dire qualcosa di interessante anche per quelli che non lo sono. Visto che non esiste un modo infallibile per garantirsi il risultato, ci si può chiedere se comunque si può provare a definire un comportamento "ottimale" anche in casi come questi. Un modo per affrontare il problema è di immaginare di giocare più volte contro lo stesso giocatore. Mi spiego nel caso della morra cinese. Se uno dei due decidesse di non giocare mai *carta*, allora dopo un po' l'altro giocatore se ne accorgerebbe, e comincerebbe a giocare sempre *sasso*, con indubbio guadagno[11]. Dunque esistono modi più o meno razionali di giocare un tale gioco. Come individuarli? L'idea consiste nell'assegnare (a priori) una certa probabilità con cui le varie strategie verranno giocate, e poi giocare in accordo con i risultati di un esperimento casuale che rispetti le probabiltà stabilite. La funzione di utilità dei giocatori si calcola adesso come *valore atteso*, come abbiamo già visto nel caso del gioco in forma estesa con la presenza di un evento casuale: guadagnare 100 o 0 con uguale probabilità equivale a guadagnare 50 con certezza. Si parla in questo caso di *strategie miste* per i giocatori, in contrapposizione alle *strategie pure*, che sono le scelte fatte con certezza. Un esito razionale del gioco diventa allora una coppia che verifica la relazione dell'equazione (1.1)[12]. Il celebre teorema di von Neumann, enunciato nel 1928, asserisce che

Ogni gioco finito a somma zero ammette equilibrio in strategie miste.

Questo non significa che ogni *singola* partita ha esito scontato, ma che se due giocatori razionali giocano ripetutamente la morra cinese, ad esempio, il risultato sarà *in media* un pareggio[13]. Da questo punto di vista, possiamo dunque dire che il teorema di von Neumann afferma che anche i giochi come la morra cinese sono strettamente determinati, sia pure nel mondo allargato delle strate-

[9] Il risultato è perfettamente naturale. Supponiamo che in un gioco il valore conservativo del primo giocatore sia 5. Potrebbe essere il valore del secondo minore di 5? Evidentemente no, perché il primo è in grado di garantirsi almeno 5, qualunque cosa faccia l'altro. Dunque il secondo non può avere una strategia che gli permette di pagare di meno. Quindi il suo valore conservativo, cioè il pagamento minimo che è in grado di garantirsi, deve essere non minore di 5.

[10] Oppure che i giocatori pareggino sempre.

[11] Infatti non perderebbe mai, e vincerebbe un certo numero di partite.

[12] Dove x, y sono le strategie miste dei giocatori 1 e 2 rispettivamente, e $f(x, y)$ rappresenta quanto paga il secondo al primo come valore atteso se i giocatori giocano la coppia (x, y).

[13] Infatti il valore atteso nel gioco esteso diventa 0 per entrambi i giocatori.

gie miste e delle utilità attese. È importante osservare come questo risultato sia comunque un progresso della teoria (tra l'altro all'epoca in cui von Neumann l'ha dimostrato c'era chi pensava che un risultato simile non fosse vero), anche se evidentemente la risposta non può essere decisiva come nel caso in cui esistono equilibri in pure.
La teoria dei giochi strettamente competitivi ha a questo punto una forma completa. Certamente sono possibili molte generalizzazioni, ma i risultati ottenuti sono del tutto soddisfacenti. Tuttavia, come già accennato, i casi interessanti sono quando i giocatori non necessariamente in ogni situazione hanno interessi contrapposti. Il dilemma del prigioniero (Esempio 3) ne è l'esempio più noto ed efficace: Filippo e Niccolò, a seconda delle scelte che fanno, possono avere 10 euro a testa, oppure 100: due situazioni ben diverse. D'altra parte, si può intuire che in questi casi, come già detto, la situazione si complichi: nel caso a somma zero, ad esempio, un giocatore può trovare le sue strategie di equilibrio senza bisogno di conoscere che cosa faccia l'altro giocatore. Inoltre nel caso di molteplici equilibri i giocatori sono indifferenti su quale equilibrio scegliere, perché la loro utilità è sempre la stessa (il loro valore conservativo). È naturale ipotizzare che questo non succeda se il gioco non è strettamente competitivo: nel gioco della battaglia dei sessi (Esempio 8) è intuibile che i comportamenti razionali siano di andare assieme a teatro oppure al cinema, però sembra difficile privilegiare una delle due soluzioni, e d'altra parte Ilaria preferisce una cosa (andare a teatro), Cesare un'altra (andare al cinema); quindi i due hanno idee diverse sugli equilibri, ma non solo: se non si mettono d'accordo su dove andare, rischiano di passare la serata soli e tristi; in altre parole, è per loro necessario coordinare le azione per giungere a un equilibrio.
Storicamente, a questo punto la teoria ha un momento di stasi, per mancanza di un'idea brillante per procedere, fino alla pubblicazione del famoso libro di von Neumann e Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behaviour*. La loro idea guida è che essendo possibile che in certe situazioni i giocatori stiano meglio che in altre, questo li porterà naturalmente a cercare di fare coalizioni. È la nascita della teoria cooperativa. Ma di questo parleremo nel prossimo paragrafo, ora invece vediamo le idee fondamentali del modello non cooperativo di Nash. Gli oggetti primitivi in questo caso sono gli spazi delle strategie dei giocatori, e le loro funzioni di utilità, che dipendono dalle scelte congiunte di *tutti* i giocatori. Un equilibrio di Nash allora, nel caso di due giocatori, è una *coppia* di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ tali che:

- fissata la strategia $\bar{y}$ del secondo giocatore, il primo ottiene il massimo possibile nella sua funzione utilità con la strategia $x = \bar{x}$;
- fissata la strategia $\bar{x}$ del primo giocatore, il secondo ottiene il massimo possibile nella sua funzione utilità con la strategia $y = \bar{y}$.

Nel caso di un gioco bimatrice, le strategie dei giocatori sono rispettivamente le righe e le colonne, e se vogliamo considerare anche le strategie miste allora gli insiemi X e Y sono tutte le distribuzioni di probabilità possibili sulle righe/colonne (rispettivamente).

Come spesso succede, un esempio dovrebbe chiarire le idee. Consideriamo il gioco seguente:

$$\begin{pmatrix} (4,5) & (3,6) \\ (6,1) & (2,1) \end{pmatrix},$$

e proviamo a verificare che l'esito $(3,6)$ proviene da un equilibrio di Nash. Il primo giocatore deve fissare la seconda colonna (che rappresenta la scelta del secondo) e osservare se la scelta della prima riga sia a lui favorevole, oppure se non gli conviene cambiare. Se cambiasse però otterrebbe 2 invece che 3: non gli interessa. Analogamente, il secondo sa che cambiando otterrebbe 5 invece che 6: non gli conviene. Nessuno dei due ha interesse a cambiare: siamo in una situazione di equilibrio. Chi si è incuriosito, potrebbe fare ragionamenti analoghi per vedere che c'è un altro equilibrio di Nash, e uno solo (in miste invece ne spunta un terzo, ma questo non è affatto facile da trovare). Ritornando all'equazione (1.1), che caratterizza gli equilibri nei giochi a somma zero, si vede che questi effettivamente sono equilibri di Nash. Tuttavia, al di fuori del caso a somma zero, in generale i valori conservativi non hanno molta importanza[14]. Abbiamo visto in precedenza che i giochi possono anche essere matematicamente formalizzati per mezzo di un albero, e per trovarne un esito razionale abbiamo utilizzato il metodo dell'induzione a ritroso; se riscriviamo il gioco descritto dall'albero in forma strategica, un teorema garantisce che le soluzioni determinate dall'induzione a ritroso sono equilibri di Nash. Questo modello astratto ha in più la caratteristica di mettere bene in evidenza che cosa sia in generale un comportamento razionale da parte dei giocatori: ogni giocatore massimizza la propria utilità, prendendo per buono che l'altro utilizzi la strategia proposta. D'altra parte, prendere per buono che l'altro si comporti così è consistente, perché anche l'altro non ha interesse a cambiare la strategia a lui proposta.

Non è il caso qui di parlare oltre di questa idea, che Nash ha sviluppato nella sua tesi di dottorato, e che quaranta anni dopo gli ha procurato il Premio Nobel per l'Economia. La conclusione è che l'idea di equilibrio sviluppata da Nash è il concetto *centrale* della teoria non cooperativa. Anche raffinamenti successivi, quali ad esempio l'idea di equilibrio correlato, si basano sostanzialmente sul concetto introdotto da Nash. Va comunque messo in evidenza che la definizione, pur così naturale, non risolve i problemi in caso di non unicità, e soprattutto non sembra fornire una soluzione "interessante" nei giochi del tipo dilemma del prigioniero. Lo riprendo un attimo, per raccontarlo nella sua forma originale (l'Esempio 3 ne propone una formulazione equivalente). Un giudice convoca due persone sospettate di essere complici di un grave crimine, e fa loro il discorso seguente: "se uno dei due confessa e l'altro no, chi confessa è libero per aver assicurato un irriducibile alla giustizia, l'altro prende 10 anni di galera. Se entrambi confessate, la pena prevista è di 7 anni di galera. Se nessuno confessa, le

[14] I valori conservativi nel caso non a somma zero possono essere molto poco significativi, proprio perché in certe situazioni i giocatori non hanno interesse a prendere una decisione ostile all'altro. Nel gioco:

$$\begin{pmatrix} (1,1) & (-1,-1) \\ (0,0) & (10,10) \end{pmatrix},$$

i valori conservativi di entrambi sono zero, ma l'esito $(0,0)$ chiaramente non interessa nessuno.

prove sono insufficienti per provare la vostra colpevolezza riguardo al crimine, ma troverò il modo di condannare entrambi ad una pena detentiva di un anno, per un reato più lieve". Ecco la bimatrice:

$$\begin{pmatrix} (-7,-7) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{pmatrix},$$

in cui il valore -7, ad esempio, è associato al fatto che confessando entrambi si faranno sette anni di galera. È facile accorgersi che l'unico equilibrio di Nash sta nel confessare: una conclusione molto deludente, visto che i due giocatori, accordandosi, potrebbero fare solo un anno di galera, invece di sette. In realtà c'è di più, perché per ogni giocatore è più conveniente confessare, *qualunque strategia decida di utilizzare l'altro*: in questo caso si parla di *strategia dominante*, e chiaramente le strategie dominanti sono le uniche di Nash[15]. È evidente il fatto che questa soluzione appare molto deludente dal punto di vista dell'efficienza. D'altra parte, la teoria non è stata capace di elaborare un concetto ragionevole che induca alla collaborazione in un esempio come questo. Tuttavia uno sviluppo molto importante si ottiene considerando il gioco ripetuto più volte; un'ipotesi naturale da assumere, visto che la ripetizione rende "l'esperimento" interessante. In tal caso un risultato profondo ma difficile da spiegare nei dettagli sostanzialmente dice che in certe ipotesi il gioco ripetuto prevede, tra i molti equilibri di Nash, anche la collaborazione tra i giocatori: in altre parole, due persone possono decidere razionalmente e coerentemente di collaborare, e questo accordo può reggere. Tuttavia non è detto che il meccanismo funzioni sempre. Tutta la nostra vita sociale è condizionata dallo stesso dilemma: l'uomo si dà delle regole di convivenza civile nella convinzione che queste migliorino le condizioni della collettività, e quindi di tutti, ma chi le viola ne ha spesso un vantaggio immediato; ne vediamo tutti i giorni esempi: viola i patti, ad esempio, chi non paga le tasse o chi guidando salta continuamente di corsia in autostrada.

1.5 La Teoria Cooperativa

Come accennato in precedenza, l'idea di gioco cooperativo è stata introdotta da von Neumann e Morgenstern. Il contributo del loro libro è fondamentale per aver reso lo studio dei giochi una disciplina sistematica, e per aver proposto un cambiamento radicale nel modo di studiare i problemi dell'economia, delle scienze politiche e di quelle sociali. Il metodo proposto consiste nel tradurre i problemi in giochi opportuni, nel trovare le soluzioni di questi con le tecniche sviluppate dalla teoria, e nel ritradurre le soluzioni trovate in termini di comportamenti economici ottimali. L'idea di gioco cooperativo nasce, come già accennato in precedenza, dall'esigenza di analizzare il comportamento razionale di agenti che interagiscono in situazioni non strettamente competitive. In tal

[15] *Strategia dominata* invece è quella tale che, ne esiste un'altra che procura al giocatore maggiore utilità, qualunque cosa faccia l'altro. Una strategia dominata non può far parte di un equilibrio di Nash.

caso è ragionevole pensare che i giocatori possano fare alleanze, formare coalizioni ecc. Ogni coalizione sarà in grado poi di garantire una certa distribuzione di utilità all'interno dei suoi membri. Che cosa distingue il gioco cooperativo da quello non cooperativo? Il fatto che si ipotizzi la nascita delle coalizioni non significa che si suppone che i giocatori siano diversi, meno egoisti; le coalizioni sono uno strumento possibile per ottenere migliori risultati individuali, come nel caso non cooperativo. La differenza nei due approcci sta in un'altra cosa: secondo J. Harsanyi, premio Nobel, con Nash, per l'Economia, un gioco è definito cooperativo se *gli accordi tra i giocatori sono vincolanti.* In caso contrario, il gioco è non cooperativo.

All'interno dei giochi cooperativi, la teoria distingue fra quelli TU (*utilità trasferibile*) e quelli NTU (*utilità non trasferibile*). Qui ci limitiamo a qualche esempio di gioco TU, già sufficiente comunque a introdurre le idee principali di questo approccio.

Per definire un gioco cooperativo abbiamo bisogno dell'insieme $N = \{1, \dots, n\}$ dei giocatori, e dal dato, per ogni $A \subset N$, di un numero reale, denotato con $v(A)$. $A \subset N$ rappresenta una possibile *coalizione*, e $v(A)$ rappresenta l'utilità, o in altri casi un costo, che la stessa è in grado di garantirsi se i giocatori di A si alleano. v è detta la *funzione caratteristica* del gioco. Il modo migliore di capire l'idea sottostante questa definizione è di illustrarla con qualche esempio.

Esempio 10. *(Due compratori e un venditore).* Due persone sono interessate ad un bene che è in possesso di una terza persona. Il giocatore 1, che possiede il bene, lo valuta meno di chi lo vuole comprare (altrimenti non c'è situazione di interazione tra i tre). Fissiamo per esempio a 100 il valore che il possessore assegna al bene. Gli altri due, che chiamiamo rispettivamente 2 e 3, valutano il bene 200 e 300. Possiamo allora definire il gioco come $N = \{1, 2, 3\}$, e le coalizioni sono otto:

$$\{\varphi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\} = N\}^{16}.$$

Possiamo inoltre porre $v(\{1\}) = 100$, $v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0$, $v(\{1, 2\}) = 200$, $v(\{1, 3\} = v(N) = 300$[17].

Esempio 11. *(Due venditori e un compratore).* Consideriamo invece il caso di un compratore (giocatore 1) e due venditori dello stesso bene; la situazione può essere descritta efficacemente ponendo $v(A) = 1$ se $A = \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}$, zero altrimenti. In questo caso, quando la funzione caratteristica v assume solo valori zero e uno, il gioco si chiama *semplice*, e v assume più il significato di indice di forza della coalizione (A è coalizione vincente se e solo se $v(A) = 1$). Il gioco non cambia se al posto di 1 mettiamo un altro numero positivo.

[16] φ rappresenta l'insieme vuoto, cioè la coalizione che non contiene giocatori. Anche se può sembrare inutile, è invece opportuno tenerla in considerazione; qualunque sia v, si assume che $v(\varphi) = 0$.

[17] Perché abbiamo definito in questo modo il gioco? Vediamo un paio di casi. Ad esempio, $v(\{2, 3\}) = 0$ perché la coalizione $\{2, 3\}$ non possiede il bene, $v(\{1, 3\}) = 300$ perché la coalizione $\{1, 3\}$ possiede il bene, che valuta 300 (infatti non se ne priva per meno).

Esempio 12. *(La pista dell'aeroporto, la bancarotta, la società per azioni).* Gli Esempi 4, 5 e 6 sono anch'essi descrivibili come giochi cooperativi. Nel caso della pista dell'aeroporto, v rappresenta un costo e non un'utilità. È naturale pensare che a una coalizione venga assegnato il costo della pista più lunga necessaria per le compagnie che formano la coalizione. Dunque si ha $v(\{1\}) = c_1$, $v(\{2\}) = c_2$, $v(\{3\}) = c_3$, $v(\{1,2\}) = c_2$, $v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = c_3$. Il caso della bancarotta, anche se si intuisce facilmente che è un problema analogo a quello dell'areoporto, è un pochino più complicato, perché non è chiaro a priori che cosa una coalizione possa garantire per sé. Una stima molto prudente potrebbe essere quello che rimane dopo che tutti gli altri creditori sono stati pagati. Nel caso della società per azioni, siamo in presenza di un gioco semplice, e daremo valore 1 a quelle coalizioni in grado da avere la maggioranza dei voti necessaria nei vari tipi di votazioni (semplice, qualificata ecc).

Una generica *soluzione di un gioco cooperativo* con $N = \{1, 2, \dots, n\}$ come insieme di giocatori è un vettore ad n componenti, ciascuna delle quali è un numero reale. Il significato dovrebbe essere chiaro: se $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ è tale vettore, allora x_i è l'utilità assegnata (o il costo, se v rappresenta dei costi) al giocatore i. Tanto per fare un esempio, nel caso dei due compratori e un venditore, se proponessimo come soluzione $(100, 100, 100)$ ciò significherebbe che l'esito del gioco prevede un'utilità di 100 a testa per i tre[18]. Un *concetto di soluzione* invece rappresenta un modo per trovare vettori che soddisfino particolari proprietà. Ad un gioco una soluzione può associare un insieme grande di vettori, ad un altro nessun vettore, ad altri ancora un solo vettore. È bene osservare che la soluzione in genere *non* è interessata a quanto viene assegnato alle coalizioni, ma solo a quel che viene dato ai giocatori: ancora una volta va ricordato che le coalizioni sono solo *un mezzo* che gli individui utilizzano per ottenere il meglio per sé.
L'idea di gioco cooperativo è così generale da rendere necessaria l'introduzione di molti concetti di soluzione: qui accenniamo rapidamente ad alcuni fra i più importanti.
Una soluzione deve per prima cosa essere *un'imputazione*, cioè un vettore $(x_1, \dots, x_n)$ tale che:

1. $x_i \geq v(\{i\})$ per ogni i;

2. $x_1 + x_2 + \dots + x_n = v(N)$[19].

Si richiede cioè ad ogni soluzione di godere delle proprietà di *razionalità individuale* e di *efficienza collettiva*: ogni giocatore deve ricavare almeno quel che è in grado di garantirsi da solo (altrimenti esce dal gioco), e tutto l'utile disponibile

[18] Per il momento, non ci poniamo il problema se la suddivisione di utili proposta sia ragionevole. Vogliamo semplicemente capire che cosa significa in questo modello soluzione.

[19] Ad esempio sono imputazioni i vettori $(100, 100, 100)$ nel gioco dei due compratori e un venditore (Esempio 10), $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ nel gioco dei due venditori e un compratore (Esempio 11), mentre in quest'ultimo non lo sono $(0, 0, 0)$ e $(1, -1, 1)$.

va distribuito (e ovviamente non di più)[20]. Questa richiesta è quindi da ritenere minimale. In realtà, visto che le coalizioni sono possibili, sembra naturale richiedere che esse stesse gradiscano una distribuzione di utilità, altrimenti una parte dei giocatori potrebbe ritirarsi. Si arriva così ad uno dei concetti fondamentali di soluzione: il *nucleo* del gioco v è l'insieme di quelle distribuzioni di utilità che nessuna coalizione ha interesse a rifiutare. D'altra parte, la coalizione A rifiuta quel che le viene proposto se la somma delle utilità proposte ai suoi giocatori è inferiore al valore $v(A)$ che, come detto, rappresenta quel che lei è complessivamente in grado di procurarsi. Per capire meglio l'idea vediamo di caratterizzare il nucleo in un esempio semplice: quello dei due venditori e un compratore (Esempio 11): un elemento del nucleo è un vettore x fatto da tre elementi, scriviamo $x = (x_1, x_2, x_3)$. Ora scriviamo i vincoli che questo vettore deve soddisfare:

$$\begin{cases} x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_1 + x_3 \geq 1 \\ x_2 + x_3 \geq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

La prima riga impone le disequazioni relative alle coalizioni fatte dai singoli individui: essi non accettano meno di zero, evidentemente. La seconda riga riguarda il vincolo imposto dalla coalizione $\{1, 2\}$; essa è in gradi di garantirsi 1, quindi la somma di quel che viene proposto ai giocatori 1 e 2, cioè $x_1 + x_2$, deve essere maggiore o uguale a 1. E così via, fino all'ultima coalizione $N = \{1, 2, 3\}$. Ora, confrontando l'ultima equazione con la seconda si vede che deve essere $x_3 \leq 0$, ma la prima dice $x_3 \geq 0$, quindi $x_3 = 0$. Analogamente $x_2 = 0$. Poiché la somma delle utilità deve essere uno, allora $x_1 = 1$. Quindi il nucleo consiste del solo vettore $(1, 0, 0)$.
Vediamo ora che cosa ci propone il nucleo in alcuni dei giochi introdotti in precedenza. Nel gioco dei due compratori e un venditore (Esempio 10), la soluzione proposta dal nucleo è che il primo vende l'oggetto al terzo (che lo valuta di più rispetto al secondo), ad un prezzo che può variare fra 200 e i 300 Euro (quindi il nucleo propone in questo caso più spartizioni possibili). Nel gioco invece in cui ci sono un compratore e due venditori dello stesso bene, come abbiamo visto il nucleo consiste nell'unico vettore $(1, 0, 0)$, il che significa che il compratore ottiene il bene per nulla. È interessante notare che, nel primo esempio, il ruolo del secondo giocatore, che pure alla fine non fa nulla, è messo in evidenza dal fatto che il prezzo di vendita è influenzato dalla sua presenza. D'altra parte questo è logico: se il terzo facesse un'offerta minore di 200 Euro, allora il secondo potrebbe a sua volta fare un'offerta superiore, fino a un massimo di 200 Euro.

[20] Anche se non si assume esplicitamente, l'ipotesi che $v(N) \geq v(A)$ per ogni $A \subset N$ è verificata in quasi tutti i giochi interessanti. Anzi, spesso i giochi verificano l'ipotesi detta di *superadditività*, che cioè $v(A \cup B) \geq v(A) + v(B)$ se $A \cap B = \emptyset$, che stabilisce che *l'unione fa la forza*. Questo fa sì che sia ragionevole assumere che i giocatori si metteranno d'accordo per spartirsi tutta la quantità $v(N)$.

In questo caso il nucleo propone tante soluzioni possibili. Nel secondo caso ciò che indica il nucleo è un fatto ben noto in economia, anche se qui espresso in maniera brutale: l'eccesso di offerta mette i venditori in balia del compratore. Infatti nel nucleo sta solo il vettore che assegna tutto al compratore, nulla ai venditori. Altre soluzioni, come vedremo, propongono una soluzione diversa, che tiene conto del fatto che in qualche modo i due venditori non sono del tutto inutili. Un esempio ancora più interessante di come il nucleo possa proporre soluzioni bizzarre è il famoso *gioco dei guanti*, di cui esistono infinite varianti: una versione che ne mette bene in luce la stranezza è quando si hanno 4 giocatori; il primo ed il secondo possiedono uno e due guanti sinistri, rispettivamente, mentre il terzo e quarto un destro ciascuno. Naturalmente lo scopo del gioco consiste nel formare paia di guanti. In questo caso il nucleo è costituito dal solo vettore $(0, 0, 1, 1)$, il che significa che i possessori di un guanto sinistro (guanti che sono in eccedenza) devono cedere il loro per nulla. Risultato che appare ancora più bizzarro se si pensa che il giocatore due potrebbe cambiare la situazione semplicemente eliminando un guanto in suo possesso.

A dispetto del fatto che a volte le soluzioni proposte dal nucleo sembrino controintuitive, esso rappresenta un concetto di soluzione molto importante, soprattutto in applicazioni economiche. Però il nucleo presenta ancora un altro problema: è facile verificare che in molti casi può essere vuoto! L'esempio più semplice è quando siamo in presenza di tre giocatori che si devono spartire a maggioranza una somma fissata (possiamo porre l'utilità della stessa uguale a 1). In tal caso le coalizioni di due giocatori risultano vincenti ($v(A) = 1$) se il numero dei componenti la coalizione A è almeno due, 0 altrimenti-ancora un gioco semplice- ed un calcolo immediato mostra che il nucleo è vuoto[21]. Il che rende indispensabile la definizione di altre soluzioni, che possano suggerire possibili spartizioni anche nel caso in cui almeno una coalizione non sia soddisfatta della spartizione proposta. Una soluzione, che qui illustro solo a parole, considera, per ogni possibile imputazione, il grado di insoddisfazione $e(A, x)$ della coalizione A per la distribuzione dell'imputazione x: $e(A, x) = v(A) - \sum_{i \in A} x_i$. L'imputazione x sta nel nucleo, ad esempio, se e solo se $e(A, x) \leq 0$ per ogni A, cioè se nessuna coalizione si lamenta. Se però il nucleo è vuoto, allora qualunque sia la distribuzione proposta c'è almeno una coalizione che si lamenta. Che fare in questo caso? Un'idea intelligente è di considerare, per ogni imputazione x, il lamento della coalizione più sfavorita (cioè di quella che si lamenta maggiormente), e poi scegliere quella distribuzione di utilità efficiente che minimizza questo lamento massimo. Se poi sono molte le distribuzioni che hanno questa proprietà, fra queste si può scegliere quelle che minimizzano il secondo massimo lamento, e così via. Si dimostra che in questo modo si arriva ad un'unica distribuzione di utilità, che viene chiamata il *nucleolo* del gioco.
Nel gioco precedente dei compratori, il prezzo di vendita è 250, e cioè il prezzo

[21] Supponiamo (x_1, x_2, x_3) sia un vettore del nucleo. Le condizioni $x_1 + x_2 \geq 1$, $x_1 + x_3 \geq 1$, $x_2 + x_3 \geq 1$, imposte dalle coalizioni formate da due giocatori implicano, prendendo la loro somma, $2(x_1 + x_2 + x_3) \geq 3$, che è in contraddizione con la condizione di efficienza $x_1 + x_2 + x_3 = 1$. Quindi il nucleo è vuoto.

intermedio fra quello minimo e quello massimo proposti dal nucleo; nel gioco di maggioranza a tre giocatori, propone l'imputazione $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$: in questo caso ogni coalizione di due giocatori si lamenta $\frac{1}{3}$, e non è difficile verificare che ogni distribuzione di utilità diversa farebbe lamentare di più una coalizione. I risultati precedenti non sono sorprendenti, dal momento che il nucleolo è soluzione che gode di forti proprietà di simmetria; purtroppo però anche il nucleolo può dare risultati bizzarri: ad esempio, siccome appartiene al nucleo, purché naturalmente questo non sia vuoto, nel gioco dei due venditori ed un compratore il nucleolo assegna tutto al compratore.

Passiamo al terzo concetto di soluzione che qui consideriamo: si chiama *indice di Shapley*. La sua formula è un po' complicata, ad una prima lettura, ma non bisogna spaventarsi. Se poi non si capiscono i dettagli, come ha scritto Nash nella sua celebre tesi, questo non impedisce a chi vuole di capire lo stesso le idee. Dunque, intanto va osservato che questa soluzione, come il nucleolo, ha l'interessante proprietà di assegnare un'unica distribuzione di utilità ad ogni giocatore. La indichiamo con S, in onore di Shapley. Risulta così definita, per un qualunque gioco v[22]:

$$S_i(v) = \sum_{i \in A \subset N} \frac{(a-1)!(n-a)!}{n!}[v(A) - v(A \setminus \{i\})].$$

L'indice di Shapley associa al giocatore i i *contributi marginali*[23] che esso porta ad ogni coalizione, pesati secondo un certo coefficiente (per la coalizione $A \setminus \{i\}$ esso è $\frac{(a-1)!(n-a)!}{n!}$). Tale coefficiente ha un'interpretazione probabilistica interessante: supponendo che i giocatori decidano di trovarsi per giocare, in un certo luogo e ad una data ora, il coefficiente $\frac{(a-1)!(n-a)!}{n!}$ rappresenta la probabilità che i al suo arrivo trovi gli altri giocatori della coalizione A, e solo loro[24].
Nel gioco di maggioranza semplice fra tre giocatori, l'indice di Shapley propone $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, come il nucleolo. Nel gioco dei guanti, invece la soluzione è $(\frac{1}{4}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12}, \frac{7}{12})$. Vettore che presenta caratteristiche interessanti: tiene conto del fatto che c'è un eccesso di offerta di guanti sinistri, il che rende un po' più debole degli altri il giocatore uno; il secondo ne risente relativamente, perché sfrutta il fatto di poter soddisfare da solo la domanda dei giocatori col guanto destro. Questo mostra che il valore tiene conto di altri aspetti, ignorati dal nucleo.
L'indice di Shapley ha applicazioni importanti anche nei giochi semplici. Come esempio, si può pensare all'analisi della composizione di un Parlamento, potrebbe essere il Parlamento Europeo, o il Congresso negli Stati Uniti. Il problema fondamentale in questi casi è come ripartire i seggi fra i vari stati. Tutti i metodi di ripartizione dei seggi hanno dei difetti: esiste persino un celebre risultato che lo afferma: si tratta del teorema di Arrow (un altro vincitore del Premio Nobel

[22]Data una coalizione A, indicheremo con a la sua cardinalità, cioè il numero dei giocatori che formano la coalizione A.

[23]Il contributo marginale che il giocatore i porta alla coalizione C è la quantità $v(C \cup \{i\}) - v(C)$. Chiaramente può essere interpretato come l'apporto che il giocatore porta alla coalizione.

[24]Assumendo equiprobabile l'ordine d'arrivo dei giocatori.

per l'Economia), forse il più celebre di tutte le Scienze Sociali. Il valore Shapley è quindi uno dei modi possibili per valutare il potere dei giocatori in un gioco. Per concludere, ecco la risposta che dà l'indice di Shapley al problema di come suddividere le spese per la costruzione della pista dell'aeroporto (Esempi 4 e 12): il primo paga $\frac{1}{3}c_1$, il secondo $\frac{1}{2}c_2 - \frac{1}{6}c_1$, il terzo $c_3 - \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{2}c_2$. Detto così non sembra molto significativo ma, per prima cosa è utile osservare che la somma dei tre pagamenti fa proprio c_3, il che mostra su un esempio quel che è vero sempre, e cioè che l'indice è efficiente; poi, e questo è molto interessante, il risultato, ha la seguente interpretazione molto naturale: il primo, che da solo spenderebbe c_1, divide questa spesa equamente con gli altri due, che usufruiscono dello stesso servizio. Il secondo chilometro porta un costo aggiuntivo di $c_2 - c_1$: questa spesa viene equamente divisa tra gli altri due che utilizzano la pista. Il resto che manca $(c_3 - c_2)$ infine è pagato dall'unico utente che ha bisogno del terzo chilometro.
Concludo questo paragrafo riprendendo un concetto già espresso: il fatto che esistano tante soluzioni per i giochi cooperativi non deve essere considerato sintomo di confusione. La varietà di situazioni che vengono descritti come gioco cooperativo impone, in un certo senso, che si considerino diverse soluzioni possibili. Sta a chi utilizza questi modelli scegliere la soluzione più adatta. E nessuna soluzione è adatta ad ogni gioco: per esempio l'indice di Shapley per il gioco del venditore e dei due compratori è $(\frac{650}{3}, \frac{50}{3}, \frac{200}{3})$, cui sembra difficile dare un significato sensato. Per questo le varie soluzioni vengono caratterizzate da proprietà che servono a descriverle: abbiamo ad esempio ricordato che l'indice di Shapley ed il nucleolo godono di proprietà di simmetria, il che significa che non privilegiano alcuni giocatori rispetto ad altri.

1.6 Conclusioni

Naturalmente il capitolo di un libro può contenere solo una parte molto limitata delle varie idee sviluppate nell'ambito di una disciplina; nonostante questo il lettore può essersi fatto un'idea del tipo di ragionamenti che stanno alla base della Teoria dei Giochi. In quest'ultimo paragrafo, per concludere il nostro discorso, riprendiamo due esempi introdotti all'inizio, per parlare ancora di qualche questione interessante.
Cominciamo dall'esempio dei due gruppi di agenti che devono accoppiarsi, avendo ogni elemento di un gruppo un ordine di preferenze sull'altro gruppo (Esempio 1). Il primo problema che si pone è: che cosa significa dare una soluzione a questo problema? La risposta degli esperti è stata: si devono impedire che persone accoppiate in un certo modo possano ottenere un accoppiamento migliore. Come sempre, un esempio può aiutare a apire. Supponiamo di aver deciso di accoppiare Laura con Emanuele e Alberto con Francesca. Se però Emanuele preferisse Francesca a Laura, e allo stesso tempo Francesca preferisse Emanuele ad Alberto, la nostra proposta sarebbe non ottimale perché Francesca e Emanuele non obbediranno alla nostra raccomandazione[25]. Stabilito questo, la domanda

[25] Questo è vero qualunque siano le preferenze di Alberto e Laura.

successiva diventa: è vero che, qualunque sia il numero degli elementi dei due gruppi, e qualsiasi siano le loro preferenze, è possibile formare coppie in maniera ottimale? Un teorema non difficile da dimostrare ci garantisce che è proprio così. Ma non ci basta: dal momento che di solito il sistema di accoppiamenti ottimali non è unico, sarebbe interessante sapere se esistono procedure che favoriscono un gruppo piuttosto che un altro. E anche in questo caso la risposta è positiva! Come conclusione, possiamo dire che pur se il modello è molto semplificato (ad esempio non tiene conto che le preferenze degli individui potrebbero avere un evoluzione nel tempo), le sua risposte sono molto interessanti.
Anche l'Esempio 2 che parla della contrattazione merita due parole, non foss'altro perché la prima e più celebre soluzione è stata proposta da un giovanotto di genio, poco più che ventenne, di cui abbiamo già parlato: John Nash. Nel suo primo lavoro pubblicato, egli propone un modello matematico per trattare ogni problema possibile di contrattazione, e si chiede che proprietà deve avere una soluzione ottimale di tali problemi. Dopo aver fatto un elenco di poche proprietà ragionevoli, dimostra il notevole teorema che una sola funzione soddisfa i requisiti richiesti, sull'insieme di tutti i problemi di contrattazione. Il che significa, almeno in linea teorica, aver risolto *ogni* problema di contrattazione. Incidentalmente, possiamo dire che la proposta di Nash consiste nel dire ai giocatori di massimizzare il prodotto delle loro utilità, tra tutte quelle rese possibili da una distribuzione qualunque della somma in palio. Occorre osservare che naturalmente l'approccio di Nash semplifica eccessivamente certi aspetti del problema: ad esempio, si dà per scontato che le funzioni di utilità dei giocatori siano conoscenza comune. Questo è davvero poco realistico in moltissimi casi, tanto è vero che la gente contratta e continuerà a farlo, ed uno degli accorgimenti più utilizzati (e più ovvi) è proprio quello di cercare di tenere nascosto all'altro quanto ci interessi l'oggetto della contrattazione. Un'ultima parola sull'Esempio 7. Tra i suoi equilibri di Nash, c'è quello che prevede che passi il procedimento C. La procedura per ottenerlo è che il primo dichiari di giocare A (che per lui è strategia debolmente dominante), e gli altri elimino le loro ultime scelte (strategie debolmente dominate)[26]. In questo caso il gioco si riduce ad una matrice 2×2 in cui gli esiti sono o A o C. Poiché entrambi i giocatori 2 e 3 preferiscono C ad A, il risultato è C. Quindi il primo giocatore, che in teoria ha più potere degli altri, vede passare il provvedimento a lui più inviso: ha sbagliato a dichiarare in pubblico l'uso di una strategia dominante solo debolmente.
Arrivato in fondo, mi piace citare una frase di un libro, che mi ricorda la motivazione profonda che sta alla base dello studio e dello sviluppo della Teoria dei Giochi. Si riferisce agli esseri umani, ma potrebbe essere estesa a tutti i viventi. L'ho tratta dal romanzo di Amos Oz, *Storia d'amore e di tenebra*, e recita così:

Nessun uomo è un'isola, piuttosto siamo tutti delle penisole, circondate quasi interamente da un'acqua nera, ma comunque collegate alle altre penisole.

Per concludere, cito in bibliografia qualche testo di approfondimento, la cui

[26] Strategia *debolmente dominata (dominante)* significa che in certi casi il giocatore può essere (a seconda delle scelte degli altri) indifferente tra questa e un'altra. A differenza di quelle dominate, certi equilibri possono prevedere l'uso di strategie debolmente dominate.

lettura però può essere piuttosto impegnativa per un lettore con le conoscenze date dalla scuola.

Bibliografia

[1] R. Lucchetti: Di duelli, scacchi e dilemmi; *Matematica e dintorni #2* Bruno Mondadori Editore, Terza Edizione 2007.

[2] R. Lucchetti: Passione per Trilli. Alcune idee dalla matematica, Springer, ISBN:978-88-470-0628-7 (2007).

[3] R. Lucchetti, *Giochi, teoria dei*, voce dell'Enciclopedia Treccani, (2007), p. 281-292

[4] F.Patrone, Decisori (Razionali) Interagenti, *Edizioni Plus, Pisa University Press* (2006).

Indice

1 La Matematica dei Giochi **1**
1.1 Introduzione 1
1.2 Alcuni esempi 3
1.3 Giochi in Forma Estesa 6
1.4 La Teoria Non Cooperativa 10
1.5 La Teoria Cooperativa 15
1.6 Conclusioni 21

Indice analitico

Accordi vincolanti, 3, 16
Albero del gioco, 7
Arrow, Kenneth, 21

Bancarotta, 4
Battaglia dei sessi, 5, 13
Bimatrice, 5

Coalizione, 16
Comportamento razionale, 2
Concetto di soluzione (di gioco cooperativo), 17
Contrattazione, 3, 22
Contributo marginale, 20

Dilemma del prigioniero, 3, 13

Economie di scala, 4
Efficienza collettiva, 17
Equilibrio di Nash, 13

Funzione caratteristica, 16

Giochi a somma zero, 6, 10
Giochi NTU, 16
Giochi strettamente competitivi, 10
Giochi TU, 16
Gioco dei guanti, 19, 20
Gioco del tris, 9, 10
Gioco determinato, 10
Gioco semplice, 16
Grafo, 6

Harsanyi, John, 16

Imputazione, 17
Indice di Shapley, 20
Indici di potere, 4
Induzione a ritroso, 9, 10

Livelli di sicurezza, 11

Matrice, 6
Morgenstern, Osckar, 13
Morgenstern, Oskar, 15
Morra cinese, 6, 12

Nash, 22
Nash, John, 14, 15, 20, 22
Nodi dell'albero, 7
Nucleo, 19, 20
Nucleo del gioco, 18
Nucleolo, 20
Nucleolo del gioco, 19

Ospedali e interni, 3, 21

Pista dell'areoporto, 4, 21

Rami (dell'albero), 7
Razionalità individuale, 17

Scacchi, 6, 10
Shapley, 20, 21
Shapley, LLoyd, 20
Società per azioni, 4
Soluzione (di gioco cooperativo), 17
Strategia, 8
Strategia dominante, 15
Strategia dominata, 15
Strategie debolmente dominate/dominanti, 22
Strategie miste, 12
Strategie pure, 12
Superadditività, 18

Teorema di von Neumann, 12

Utilità in senso atteso, 10

Valore atteso, 12
Valore conservativo, 13
Valori conservativi, 11, 12, 14
von Neumann, John, 12, 13, 15
Votazione, 4