

Dinamiche Evolutive ed Equilibri Correlati

Benedetta Bizzarri

Politecnico di Milano
Scuola di Ingegneria dei Sistemi
Dipartimento di Matematica "F. Brioschi"
Corso di Laurea Magistrale in Ingegneria Matematica

20 Dicembre 2012



Relatore
Roberto Lucchetti



Introduzione



Cenni Storici

Teoria dei Giochi: Nasce a metà del 1900, grazie ai contributi di John von Neumann e Oskar Morgenstern, con l'intento di descrivere matematicamente l'interazione tra individui razionali.

Teoria Evolutiva dei Giochi: Nasce circa 40 anni dopo, grazie al contributo di John Maynard Smith e George R.Price, con l'intento di descrivere matematicamente conflitti tra animali.



Concetti Fondamentali

Teoria dei Giochi:

- Strategie pure e miste;
- Equilibri di Nash;
- Equilibri correlati

Teoria Evolutiva dei Giochi:

- Strategie Evolutivamente Stabili (ESS);
- Dinamica di gioco;
- Punti di equilibrio della dinamica di gioco.



Outline

Teoria Evolutiva:

- Giochi Simmetrici: ESS, dinamica di gioco;
- Esempi: il gioco Carta-Sasso-Forbice;
- Giochi Asimmetrici: ESS, dinamica di gioco;
- Dinamica di gioco ed equilibri correlati:

Un'applicazione:

- Introduzione del modello;
- Dinamica di gioco;
- Esempi numerici

Conclusioni



Teoria Evolutiva dei Giochi



Giochi a Due Giocatori

Il giocatore I gioca le righe, il giocatore II le colonne.

- Gioco Asimmetrico: rappresentato dalla bimatrice dei payoff
 $P = (A, B^T)$

$$P = (A, B^T) = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{21}) \\ (a_{21}, b_{12}) & (a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix}$$

- Gioco Simmetrico: rappresentato dalla bimatrice dei payoff
 $P = (A, A^T)$

$$P = (A, A^T) = \begin{bmatrix} (a_{11}, a_{11}) & (a_{12}, a_{21}) \\ (a_{21}, a_{12}) & (a_{22}, a_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$



Equilibri di Nash

- Gioco Asimmetrico:

Definizione

Un coppia di strategie $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in S_n \times S_m$ è equilibrio di Nash se

$$\mathbf{p}^T A \mathbf{q} \geq \mathbf{x}^T A \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{p} \in S_n$$

$$\mathbf{q}^T B \mathbf{p} \geq \mathbf{y}^T B \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{q} \in S_m$$

- Gioco Simmetrico:

Definizione

Un equilibrio di Nash (\mathbf{p}, \mathbf{q}) si dice simmetrico se $\mathbf{p} = \mathbf{q}$, cioè se i due giocatori utilizzano la stessa strategia.



ESS

Definizione

Una strategia $\mathbf{p} \in S_n$ è evolutivamente stabile (ESS) se, per ogni $\mathbf{q} \neq \mathbf{p} \in S_n$ esiste $\bar{\epsilon}(\mathbf{q}) \in (0, 1)$ tale che vale

$$\mathbf{q}^T A(\epsilon \mathbf{q} + (1 - \epsilon) \mathbf{p}) < \mathbf{p}^T A(\epsilon \mathbf{q} + (1 - \epsilon) \mathbf{p}) \quad (1)$$

per ogni $\epsilon : 0 < \epsilon < \bar{\epsilon}(\mathbf{q})$.

- Ogni ESS è equilibrio di Nash;
- Ogni equilibrio di Nash stretto è ESS;



Equazioni della Replicazione

Consideriamo una vasta popolazione che dispone di n strategie, $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$, con matrice del gioco U :

Definizione

Lo stato della popolazione è un vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{S}_n$ la cui componente i -esima è la frequenza con cui viene usata la strategia \mathbf{E}_i all'interno della popolazione.

Equazioni della Replicazione:

$$\dot{x}_i = x_i ((A\mathbf{x})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{x}) \quad i = 1 \dots n, \quad (2)$$

con A matrice in $\mathbb{R}^{n \times n}$ tale che $a_{ij} = \mathbf{E}_i^T U \mathbf{E}_j$.



Altre Dinamiche

Dinamiche a Payoff Monotono:

$$\dot{x}_i = x_i g_i(\mathbf{x})$$

tale che $g_i(\mathbf{x}) > g_j(\mathbf{x})$ se e solo se $(A\mathbf{x})_i > (A\mathbf{x})_j$.

Un esempio noto

$$\dot{x}_i = x_i \left(e^{k(A\mathbf{x})_i} - \sum_{j=1}^n x_j e^{k(A\mathbf{x})_j} \right), \quad (3)$$



Relazione tra Equilibri di Nash e Punti di Equilibrio della Dinamica

Teorema

Valgono le seguenti proprietà:

- 1 *Se \mathbf{z} è un equilibrio di Nash per il gioco, allora è punto di equilibrio per (2);*
- 2 *Se \mathbf{z} è un punto di equilibrio stabile per (2), allora è equilibrio di Nash per il gioco;*
- 3 *Se \mathbf{z} è un punto limite di un'orbita interna per (2) (cioè $\exists \xi \neq \mathbf{z} \in \text{int}S_n$ tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, \xi) = \mathbf{z}$), allora è un equilibrio di Nash per il gioco.*
- 4 *Se \mathbf{z} è ESS per il gioco, allora è un punto di equilibrio asintoticamente stabile per (2).*
- 5 *se $\mathbf{z} \in \text{int}S_n$ è ESS per il gioco, allora è punto di equilibrio globalmente asintoticamente stabile.*



Il Gioco Sasso-Carta-Forbice Generalizzato

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \epsilon \\ \epsilon & 0 & -1 \\ -1 & \epsilon & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

con $\epsilon > 0$.

Unico equilibrio di Nash: $\mathbf{z} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Nella dinamica della replicazione:

- per $\epsilon > 1$: \mathbf{z} è ESS e quindi globalmente asintoticamente stabile.
- per $\epsilon = 1$: \mathbf{z} non è ESS ma è stabile (non asintoticamente);
- per $\epsilon < 1$: \mathbf{z} non è ESS ed è instabile;



$$\epsilon > 1$$

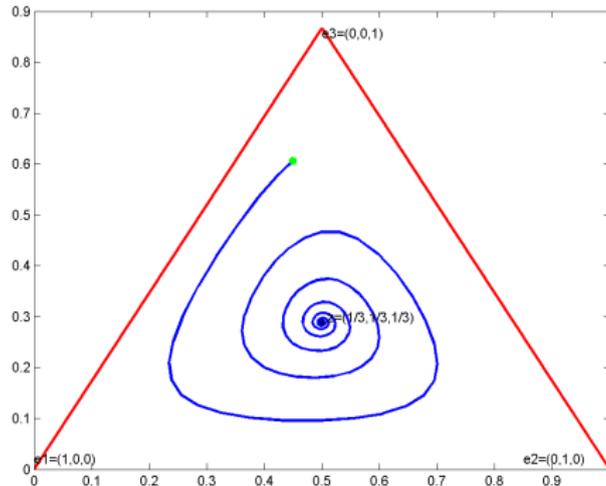


Figura: Orbite del sistema della replicazione per $\epsilon > 1$



$$\epsilon = 1$$

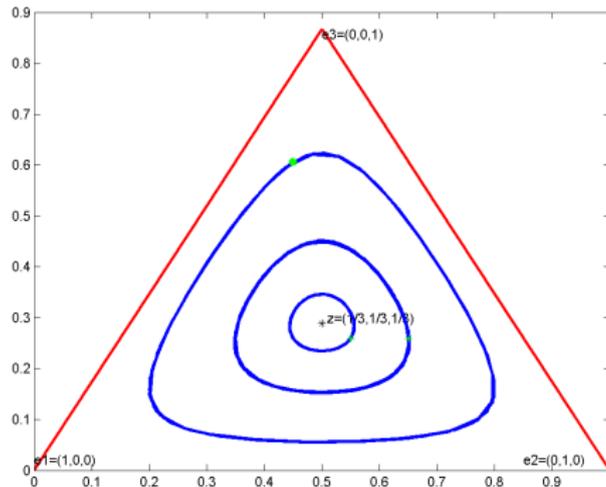


Figura: Orbite del sistema della replicazione per $\epsilon = 1$



$$\epsilon < 1$$

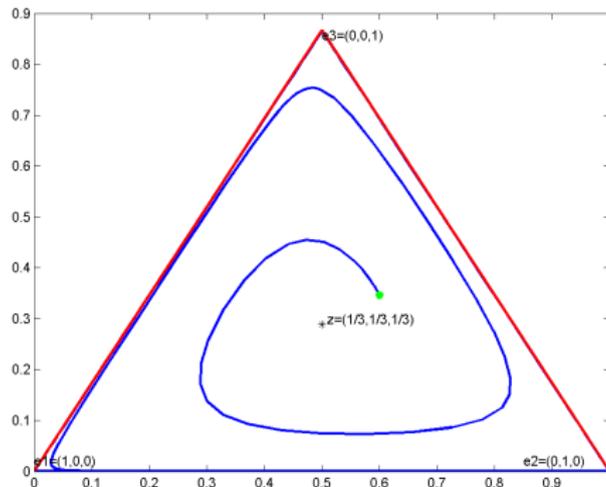


Figura: Orbite del sistema della replicazione per $\epsilon < 1$



Giochi Asimmetrici

Definizione

Un coppia di strategie $(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \in S_n \times S_m$ si dice evolutivamente stabile per un gioco asimmetrico a due specie se

$$\mathbf{p}^T A \mathbf{q} > \mathbf{x}^T A \mathbf{q} \quad \forall \mathbf{x} \neq \mathbf{p} \in S_n \quad (5)$$

$$\mathbf{q}^T B \mathbf{p} > \mathbf{y}^T B \mathbf{p} \quad \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{q} \in S_m \quad (6)$$

- Una coppia di strategie è evolutivamente stabile **se e solo se** è un equilibrio di Nash stretto.
- Una coppia di strategie evolutivamente stabile è necessariamente in strategie pure.



Dinamica di Gioco Asimmetrica

Sia x_i la frequenza della strategia \mathbf{E}_i nella specie X e y_j la frequenza della strategia \mathbf{F}_j nella specie Y ; si ottiene il sistema della replicazione:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= x_i \left((A\mathbf{y})_i - \mathbf{x}^T A\mathbf{y} \right) \quad \forall i = 1, \dots, n \\ \dot{y}_j &= y_j \left((B\mathbf{x})_j - \mathbf{y}^T B\mathbf{x} \right) \quad \forall j = 1, \dots, m\end{aligned} \tag{7}$$

per $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in S_n \times S_m$.



Relazione tra Equilibri di Nash e Punti di Equilibrio della Dinamica

Teorema

Valgono le seguenti proprietà:

- 1 se (\mathbf{z}, \mathbf{w}) è un equilibrio di Nash, allora è un punto di equilibrio per la dinamica (7);
- 2 se (\mathbf{z}, \mathbf{w}) è un punto di equilibrio stabile per (7), allora è equilibrio di Nash;
- 3 se (\mathbf{z}, \mathbf{w}) è un punto limite di un'orbita interna (cioè esiste $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0) \in \text{int}(S_n \times S_m)$, diverso da (\mathbf{z}, \mathbf{w}) tale che $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, (\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)) = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$), allora è un equilibrio di Nash;
- 4 (\mathbf{z}, \mathbf{w}) è ESS *se e solo se* è punto di equilibrio asintoticamente stabile.



Equilibri Correlati

Definizione

Un equilibrio correlato è una distribuzione di probabilità μ su $S_n \times S_m$ tale che, detta μ_{ij} la probabilità assegnata alla coppia $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ si ha che

$$\sum_{j=1}^m \mu_{ij} a_{ij} \geq \sum_{j=1}^m \mu_{ij} a_{ij} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad (8)$$

e $\forall j \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^n \mu_{ij} b_{ij} \geq \sum_{i=1}^n \mu_{ij} b_{ij} \quad \forall j \in \{1, \dots, m\} \quad (9)$$

- L'insieme degli equilibri correlati è non vuoto;
- ogni equilibrio di Nash è un equilibrio correlato;



Giochi 2×2



Giochi Asimmetrici

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (a_{11}, b_{11}) & (a_{12}, b_{12}) \\ (a_{21}, b_{21}) & (a_{22}, b_{22}) \end{bmatrix}.$$

Senza perdita di generalità consideriamo

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (0, 0) & (\alpha_1, \beta_1) \\ (\alpha_2, \beta_2) & (0, 0) \end{bmatrix},$$

con dove $\alpha_i = a_{ij} - a_{jj}$ e $\beta_i = b_{ij} - b_{ii}$.



Equilibri

- 1 Unico equilibrio di Nash in strategie miste (\mathbf{p}, \mathbf{q}) , per esempio se $\alpha_1, \alpha_2 > 0$ e $\beta_1, \beta_2 < 0 \Rightarrow$ l'esistenza di una funzione di Lyapunov non stretta per (\mathbf{p}, \mathbf{q}) garantisce la stabilità;
- 2 Unico equilibrio di Nash in strategie pure:
 - dominazione forte: asintotica stabilità del corrispondente punto di equilibrio
 - dominazione debole: il calcolo degli esponenti di Lyapunov permette di concluderne la stabilità;
- 3 Un equilibrio di Nash in strategie miste e due stretti in pure: corrispondenti punti di equilibrio asintoticamente stabili.



Giochi Simmetrici

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix};$$

possiamo ricondurci al gioco

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{bmatrix},$$

con $\alpha_1 = a_{11} - a_{21}$ e $\alpha_2 = a_{22} - a_{12}$.



Equilibri

- 1 Unico equilibrio di Nash stretto in strategie pure (ESS): punto di equilibrio asintoticamente stabile;
- 2 Due equilibri di Nash stretti (ESS) ed uno in strategie miste: convergenza verso le ESS.
- 3 Due equilibri di Nash in strategie pure ed uno in miste (ESS): convergenza verso la ESS.



Giochi 2×2

- 1 Se l'equilibrio di Nash è unico \Rightarrow unico equilibrio correlato;
- 2 Altrimenti \Rightarrow l'insieme degli equilibri correlati è combinazione lineare degli equilibri di Nash;

Quindi

- 1 stabilità o asintotica stabilità dell'equilibrio di Nash;
- 2 caso banale: ogni strategia è nel supporto dell'equilibrio correlato.



Giochi 4×4



Un Nuovo Gioco

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \epsilon & -\alpha \\ \epsilon & 0 & -1 & -\alpha \\ -1 & \epsilon & 0 & -\alpha \\ \frac{\epsilon-1}{3} + \alpha & \frac{\epsilon-1}{3} + \alpha & \frac{\epsilon-1}{3} + \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (10)$$

dove $\epsilon \in (0, 1)$ e $0 < \alpha < (1 - \epsilon)/3$.

- Unico equilibrio di Nash: $\mathbf{e}_4 = (0, 0, 0, 1)$.
- Unico equilibrio correlato $\nu = \mathbf{e}_4 \otimes \mathbf{e}_4$.



Decomposizione della Dinamica

Obiettivo: verificare che l'insieme

$$\Gamma := \{\mathbf{x} \in S_4 : x_4 = 0, x_1 x_2 x_3 = 0\} \quad (11)$$

attrae le orbite vicine, per α piccolo.

Idea: decomporre la dinamica della replicazione in $\text{int}S_4$ come un andamento decrescente lungo la componente x_4 ed un movimento spiraleggiante verso l'esterno intorno al segmento E_0 .



Conclusioni

- $\alpha > 0$ sufficientemente piccolo \Rightarrow la strategia usata nell'unico equilibrio correlato del gioco (15), e_4 , tende ad essere abbandonata per $t \rightarrow \infty$, ovvero $x_4(t) \rightarrow 0$.
- Andamento qualitativo delle orbite: decrescono lungo la direzione x_4 con movimento spiraleggiante, avvicinandosi al bordo del simpleso con $x_4 = 0$.



Estensione

Questi risultati si estendono facilmente ad altre dinamiche, per esempio a payoff monotono, e ad ogni gioco del tipo

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} a_1 & b_2 & c_3 & d_1 \\ c_1 & a_2 & b_3 & d_2 \\ b_1 & c_2 & a_3 & d_3 \\ f_1 & f_2 & f_3 & a_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

tale che

$$b_i < a_i < c_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad \prod_{i=1}^3 (a_i - b_i) > \prod_{i=1}^3 (c_i - a_i) \quad (13)$$

e

$$f_i < a_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$



Esempi

Dinamica della replicazione

Dinamica (3) con $k=1$

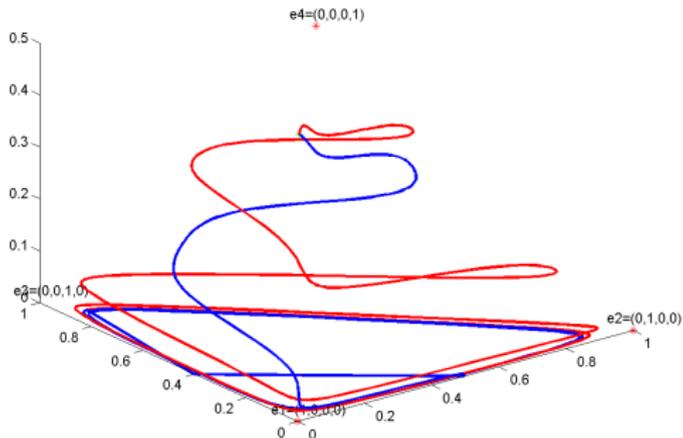


Figura: $\epsilon = \frac{2}{3}$, $\alpha = 0.01$



Esempi

Dinamica della replicazione

Dinamica (3) con $k=1$

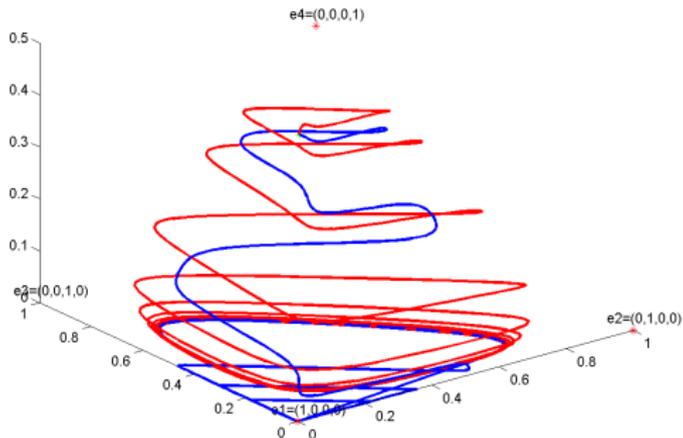


Figura: $\epsilon = \frac{4}{5}$, $\alpha = 0.01$



Dinamica ed Equilibri Correlati

- Giochi 2×2 : le strategie nel supporto di un equilibrio correlato non vengono eliminate;
- Giochi 3×3 : stesse conclusioni;
- Giochi 4×4 : risultato opposto: per il particolare gioco

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \epsilon & -\alpha \\ \epsilon & 0 & -1 & -\alpha \\ -1 & \epsilon & 0 & -\alpha \\ \frac{\epsilon-1}{3} + \alpha & \frac{\epsilon-1}{3} + \alpha & \frac{\epsilon-1}{3} + \alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

con $\epsilon < 1$ e $\alpha > 0$ piccolo, l'unica strategia nel supporto dell'unico equilibrio correlato tende ad essere eliminata.



Un'Applicazione al Problema di Immigrazione ed Integrazione



Il Modello

Due popolazioni:

- A: cittadini di uno stato, forniscono i servizi più essenziali;
- B: immigrati, devono accedere ai servizi, superando l'ostacolo della lingua, dell'integrazione, dell'eventuale ostilità dei cittadini;

Strategie possibili:

- un individuo di A può
 - 1 comportarsi in modo ostile → strategia N;
 - 2 comportarsi in modo accogliente → strategia W;
- un individuo di B può:
 - 1 integrarsi, quindi essere in grado di esprimersi nella lingua locale → strategia L;
 - 2 non integrarsi e quindi non essere in grado di farsi comprendere → strategia H;



Bimatrice del Gioco

$$\begin{bmatrix} (u(N, L), v(N, L)) & (u(N, H), v(N, H)) \\ (u(W, L), v(W, L)) & (u(W, H), v(W, H)) \end{bmatrix}$$

dove u e v sono rispettivamente la funzione payoff di A e di B.
Supponiamo $v(W, L) > v(N, L)$ e $v(W, H) > v(N, H)$.

- u dipende dal grado di avversione di un cittadino verso un immigrato;
- v dipende dall'ottenimento o meno del servizio richiesto, dalla percezione della discriminazione e dal costo richiesto per integrarsi (per la strategia L).



Gioco Equivalente

$$(A, B) = \begin{bmatrix} (0, 0) & (a_1, b_2) \\ (a_2, b_1) & (0, 0) \end{bmatrix},$$

con $a_i = a_{ij} - a_{jj}$ e $b_i = b_{ij} - b_{jj}$.

Ipotesi: $a_2 > 0$ e non si ha mai $b_1 > 0$ e $b_2 > 0$ contemporaneamente.

Il segno di a_1 dipende dalla soddisfazione nell'ostacolare un individuo di B:

- se è maggiore dell'avversione: $a_1 < 0$;
- altrimenti: $a_1 > 0$.

Il segno di b_1, b_2 dipende dal costo per imparare la lingua:

- se è molto piccolo rispetto agli altri parametri: $b_1 > 0, b_2 < 0$;
- se è molto grande rispetto agli altri parametri: $b_1 < 0, b_2 > 0$;
- altrimenti: $b_1 < 0, b_2 < 0$.



Equilibri di Nash: 6 casi

- 1 $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 > 0, b_2 < 0$: unico equilibrio in strategie pure (e_2, e_1) con payoff (a_2, b_1) ;
- 2 $a_1 < 0, a_2 > 0, b_1 > 0, b_2 < 0$: come nel caso precedente;
- 3 $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 < 0, b_2 < 0$: unico equilibrio in strategie miste (\mathbf{x}, \mathbf{y}) con $\mathbf{x} = \left(\frac{b_1}{b_1+b_2}, \frac{b_2}{b_1+b_2} \right) = (x, 1-x)$ e $\mathbf{y} = \left(\frac{a_1}{a_1+a_2}, \frac{a_2}{a_1+a_2} \right) = (y, 1-y)$;
- 4 $a_1 < 0, a_2 > 0, b_1 < 0, b_2 < 0$: unico equilibrio (e_2, e_2) con payoff $(0, 0)$;
- 5 $a_1 > 0, a_2 > 0, b_1 < 0, b_2 > 0$: unico equilibrio (e_1, e_2) con payoff (a_1, b_2) ;
- 6 $a_1 < 0, a_2 > 0, b_1 < 0, b_2 > 0$: come nel caso 4.



Equazioni di Gioco

Siano $\mathbf{p} = (p, 1 - p)$ e $\mathbf{q} = (q, 1 - q)$ gli stati della popolazione rispettivamente A e B.

Le equazioni della replicazione risultano

$$\begin{cases} \dot{p} = p(1 - p)(a_1 - q(a_1 + a_2)) \\ \dot{q} = q(1 - q)(b_1 - p(b_1 + b_2)) \end{cases} \quad (16)$$

La dinamica (3) per l'applicazione diventa:

$$\begin{cases} \dot{p} = p(1 - p) (e^{ka_1(1-q)} - e^{ka_2q}) \\ \dot{q} = q(1 - q) (e^{kb_1(1-p)} - e^{kb_2p}) \end{cases} \quad (17)$$

Per $k \rightarrow 0$ si approssima la dinamica della replicazione.



Punti di Equilibrio della Dinamica

I punti $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e (x, y) sono punti di equilibrio per la dinamica della replicazione (16).

Possiamo concludere che

- nei casi 1,2,4,5,6 l'unico equilibrio di Nash è ESS \Rightarrow è asintoticamente stabile;
- nel caso 3 l'unico equilibrio di Nash non è ESS \Rightarrow non è asintoticamente stabile; tuttavia la funzione

$$V(p, q) = b_1 \ln p + b_2 \ln(1 - p) - a_1 \ln q - a_2 \ln(1 - q) - c,$$

c tale che $V(x, y) = 0$, risulta essere di Lyapunov per $(x_1, y_1) \Rightarrow$ l'equilibrio di Nash è stabile.



Caso 1

Dinamica (3), $k=1$
Dinamica della Replicazione

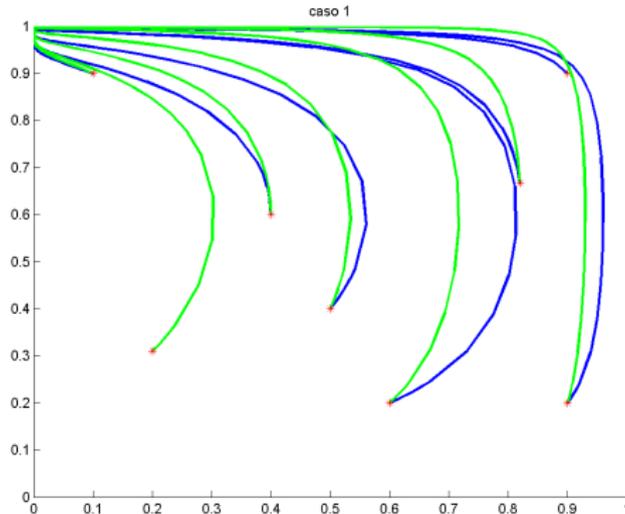


Figura: Caso 1



Caso 2

Dinamica (3), $k=1$ Dinamica della Replicazione

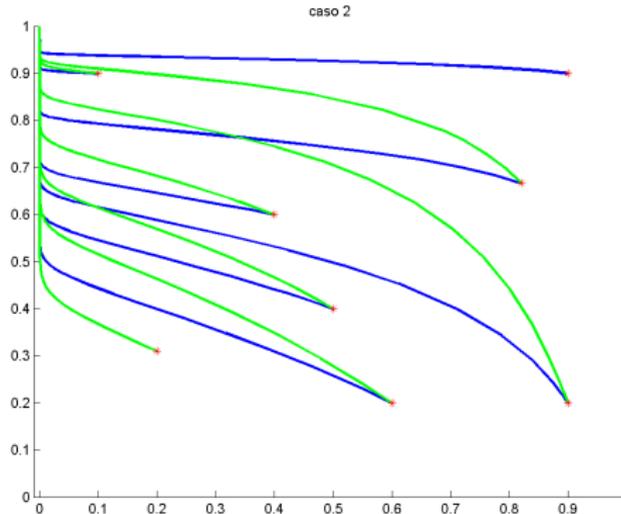


Figura: Caso 2



Caso 3

Dinamica (3), $k=1$
Dinamica della Replicazione

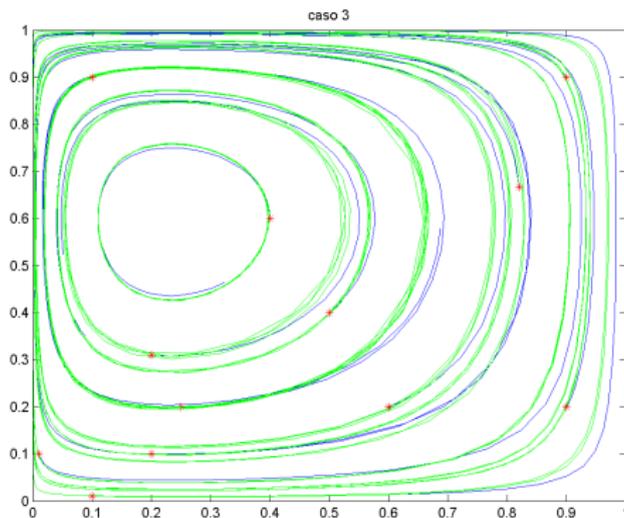


Figura: Caso 3



Caso 4

Dinamica (3), $k=1$
Dinamica della Replicazione

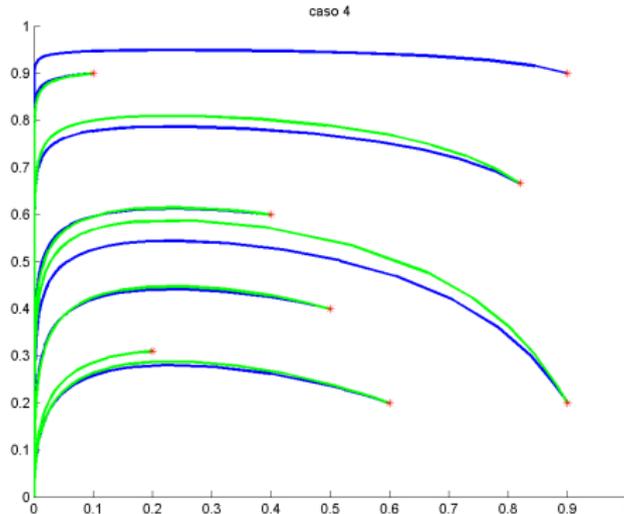


Figura: Caso 4



Caso 5

Dinamica (3), $k=1$
Dinamica della Replicazione

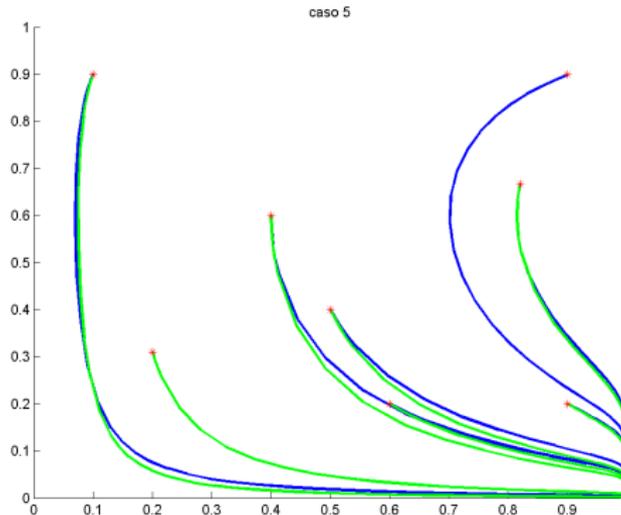


Figura: Caso 5



Caso 6

Dinamica (3), $k=1$ Dinamica della Replicazione

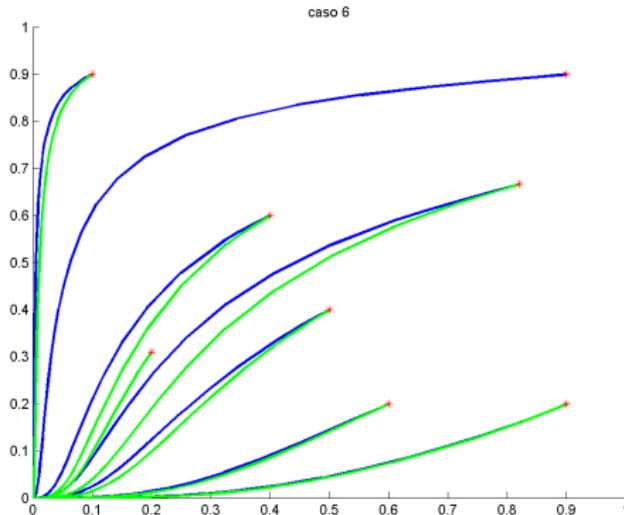


Figura: Caso 6



Conclusioni



Conclusioni

- 1 razionalità dei giocatori sostituita dalla dinamica di gioco;
- 2 nuovo concetto di ESS;
- 3 congruenza tra le due teorie: convergenza verso ESS quindi verso gli equilibri di Nash;
- 4 non immediato il rapporto tra equilibri correlati e dinamica del gioco:
 - per una speciale classe di giochi 4×4 le strategie usate nell'unico equilibrio correlato vengono eliminate per particolari dinamiche di gioco;
 - ciò non si verifica nei giochi 2×2 e 3×3 ;
- 5 teoria molto utile anche in contesti diversi da quello biologico, per cui è stata sviluppata.



Bibliografia

-  André Barreira da Silva Rocha, *An Evolutionary Game Approach to the Issues of Migration, Nationalism, Assimilation and Enclaves*. (2010), University of Essex, Department of Economics.
-  Timothy N. Cason, Tridib Sharma, *Recommended Play and Correlated Equilibria: An Experimental Study*. (2006)
http://www.krannert.purdue.edu/faculty/cason/papers/corr_equil_reco.pdf.
-  Vito Fragnelli, *Teoria dei Giochi*. (2010-2011),
<http://people.unipmn.it/fragnelli/dispense/TdGB.PDF>.
-  Daniel Friedman, *Evolutionary Games in Economics*. *Econometrica*, Vol. 59, No. 3 (May, 1991), 637-666
-  Josef Hofbauer, *Heteroclinic Cycles in Ecological Differential Equations*. (1994), Tatra Mountains Mathematical Publications 4, 105-116.



Bibliografia

-  Josef Hofbauer, Karl Sigmund, *Evolutionary Game Dynamics*. Bulletin of the American Mathematical Society 40, (2003), 479-511.
-  Josef Hofbauer, Karl Sigmund, *Evolutionary Games and Population Dynamics*. Cambridge University Press 1988.
-  Roberto Lucchetti, *A Primer in Game Theory*. (2011), Esculapio.
-  C.D. Pagani, Sandro Salsa, *Analisi Matematica volume 2*. (2006), Zanichelli.
-  Fioravante Patrone, Paola Radrizzani, *Equilibri Correlati*. (2006), http://www.fioravante.patrone.name/mat/TdG/DRI/equilibri_correlati/equilibri_correlati.pdf.



Bibliografia

-  Ronald Peeters, Jon Potters, *On the Structure of the Set of Correlated Equilibria in two-by-two Bimatrix Games*, (1999), <http://ideas.repec.org/p/dgr/kubcen/199945.html>.
-  William H. Sandholm, *Deterministic Evolutionary Dynamics*. (2005), New Palgrave Dictionary of Economics, 2nd edition
-  William H. Sandholm, *Evolutionary Game Theory*. (2007), University of Wisconsin.
-  William H. Sandholm, *Population Games and Evolutionary Dynamics*. (2008), MIT Press.
-  J. Maynard Smith, *Evolution and the Theory of Games*. Cambridge Univeristy Press 1982.



Bibliografia

-  J. Maynard Smith, G.R. Price, *The Logic of Animal Conflict*. (1973), Nature Vol. 246 (5427).
-  Yannick Viossat, *The replicator dynamics does not lead to correlated equilibria*. Games and Economic Behavior 59 (2007) 397-407.
-  Yannick Viossat, *Evolutionary dynamics may eliminate all strategies used in correlated equilibrium*. Mathematical Social Sciences 56, 1 (2008) 27-43.
-  Yannick Viossat, *Correlated equilibria, evolutionary games and population dynamics*. (2005) PhD dissertation. Ecole Polytechnique, Paris.
-  Jorgen W. Weibull, *Evolutionary Game Theory*. Cambridge: MIT Press 1995.
-  E.C. Zeeman, *Population Dynamics from Game Theory*. (1980), Lecture Notes in Math., vol. 819. Springer, pp. 471-497

