5

Giochi: un diverso approccio

Dove si comincia a parlare di un matematico speciale e vulcanico, che tra le tante cose che ha fatto si è divertito a dare una definizione formale e astratta di una particolare classe di giochi. Idea che gli è venuta per cercare di imparare a vincere con gli amici al gioco del go. Si continua poi con il vedere come la teoria dei giochi abbia connessioni a volte sorprendenti con parti molto astratte della matematica, per concludere però che può essere una disciplina anche molto applicata, utile per economisti, ingegneri, biologi ecc.

▼ Voglio provare ancora una volta a coinvolgerti sul discorso giochi, ma potrei prometterti che è l'ultima...
◇ Credo poco alle tue promesse in generale, niente a una come questa.
▼ L'ultima, e prometto che ti avviso prima se mi frulla di nuovo in testa l'idea di parlartene ancora.
◇ Cioè ti sei appena contraddetto. Per definizione, ultimo significa che non ha seguenti.
▼ No, perché hai sbagliato definizione: ultimo è quello che viene dopo tutti i precedenti.
◇ D'accordo. Di che giochi volevi parlare?
▼ Ti ricordi quando Du Sautoy, il famoso matematico inglese che tra le altre cose conduceva un programma in prima serata sulla BBC di problemi matematici risolti da stelle dello spettacolo, è venuto a Mantova a presentare il suo libro, *Il disordine perfetto*?
◇ Certo, ricordo che ha fatto anche una bellissima riedizione di quel programma, con problemi botta e risposta con il pubblico, diviso in due squadre... è stato molto divertente.
▼ Anche un po' disonesto, c'eri tu con una squadra, che infatti ha vinto.
◇ Anche tu eri nella stessa squadra.
▼ Certo, mi piace vincere, in queste competizioni anche vincere senza fatica. Per questo mi sono messo con te, sapevo che tu in queste cose ci sguaz-

zi. Io mi sono dedicato a osservare altre cose, la tecnica di Du Sautoy (caso mai una tv mi chiamasse a fare un programma simile), le reazioni delle persone...

◇ Va bene, ma che c'entra Du Sautoy con i giochi? Mi hai convinto che la teoria dei giochi non si occupa di «giochi di destrezza matematica», ma di interazioni, di giochi in senso pratico, e adesso mi tiri fuori i problemi da olimpiadi della matematica?

▼ Per presentare Du Sautoy all'incontro organizzato al Festivaletteratura, la Rizzoli mi aveva mandato un'anteprima del libro, che mi sono letto in vacanza. Parlando di simmetrie, di gruppi finiti e argomenti simili, ovviamente mi sono imbattuto in un personaggio che forse conosci.

◇ Chi?

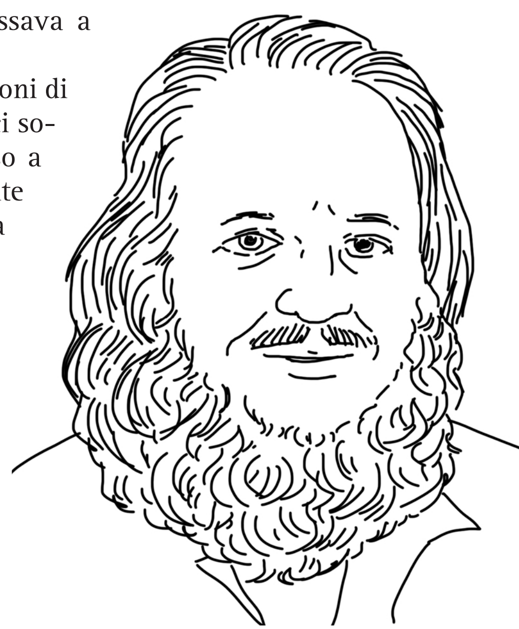
▼ John Conway...

◇ Le battute oggi ti vengono male. Nei due anni che ho passato a Cambridge, quando si andava a bere il tè lo si trovava già lì con la sua combriccola a giocare a scacchi, a go, a hex, a backgammon. Come abbia fatto a preparare l'atlas dei gruppi finiti ha dell'inimmaginabile visto quanto tempo passava a giocare.

▼ Come hai appena detto, tra le varie passioni di questo esuberante personaggio, c'erano e ci sono i giochi. E gente come lui riesce spesso a fare di una passione qualcosa di veramente interessante, ed ecco che ha sviluppato una fantasiosa e spettacolare teoria del gioco.

◇ Ne ho sentito parlare. Perché dici del gioco?

▼ La sua teoria non comprende, almeno a quanto mi risulta, tutti i giochi nel senso della teoria dei giochi standard. Ma non credo che questo fosse il suo scopo. Lui s'era incaponito a studiare un modo efficiente per le chiusure del go. Nel pensare a questo, gli è venuta in mente una teoria astratta incredibilmente elegante, in cui la classe dei giochi da lui definita ha una struttura di gruppo abeliano, che tra l'altro ha come sottogruppo un insieme piuttosto interessante, che può essere reso campo totalmente ordinato.



John Conway

◇ Devo ammettere che sono felice che tu abbia deciso di parlare di giochi un'*ultima* volta! Mi sento colpevole per non saperne di più sui giochi di Conway.

▼ Originariamente lui l'ha chiamato campo dei *numeri*: poi un suo amico per divulgare la sua idea ne ha scritto una specie di novella, che è stata prontamente pubblicata, anche se purtroppo non tradotta in Italiano, in cui il campo viene battezzato in maniera un po' diversa

◇ Credo che sia l'unico libro che ho comprato più di una volta, ma che non riesco a possedere: lo presto sempre. Altro genio: Donald Knuth. Hai proprio ragione, senza il libretto su «Surreal Numbers» i giochi di Conway non sarebbero diventati così famosi... e studiati.

Donald Knuth

▼ Un altro genio multiforme, che tra l'altro si è ritagliato un posto nella storia del pensiero scientifico in maniera del tutto originale: ha cambiato il modo di scrivere e leggere un lavoro scientifico, sia esso di Matematica o di Fisica, di Chimica o di Informatica.

◇ Quando il linguaggio di programmazione TEX per preparare testi a stampa – il cosiddetto typesetting –, apparve sulla scena informatica negli anni Settanta, c'erano tre o quattro altri linguaggi molto usati tra gli informatici (e i matematici che si dilettavano di informatica).

▼ Word e quali altri?

◇ Word non era uno di quelli: a quei tempi Gates faceva ancora pubblicità sui giornali, scrivendo «tra sei mesi, il nostro pacchetto farà quello che oggi fa Wordstar, ma in più sarà compatibile con Painter: aspettate, non comprate Wordstar».
Con il typesetting allora si facevano cose da ridere per i computer di oggi, ma per quei tempi erano incredibili: con un singolo computer si poteva emulare la qualità di stampa di un giornale o di una rivista.

▼ Immagino che ti permettessero di scrivere formule matematiche complicate e via di questo passo.

◇ Esatto, e molto di più, ma i loro risultati non sfruttavano il mezzo (il computer) al meglio. O perlomeno questo era quello che pensava Knuth. Ma che per questo gli sia venuto in mente di disegnare un linguaggio per fare typesetting mi lascia ancora ammutolito. Gli esperti a CMU si chiedevano come fosse possibile che un programma per typesetting producesse risultati così incredibilmente superiori agli altri in un decimo del tempo impiegato dagli altri.

▼ Il libro che voleva stampare era *The Art of Computer Programming*, cioè il secondo volume della serie di cinque volumi che credo sia ancora la bibbia per quanto riguarda le basi della programmazione.
◇ Sì, è un libro (cioè quattro volumi, per ora) in cui puoi star certo di trovare l'algoritmo che fa per te. Knuth è un matematico eclettico, non direi esuberante, come dicevi tu per Conway.
▼ Mi era venuto da descrivere Conway come esuberante perché questo genio della matematica ha fatto talmente tante cose e così interessanti che credo la maggior parte delle persone che dovessero leggere il suo curriculum sarebbe portato a concludere che la sua vita sia stata interamente dedicata alla matematica. Invece non so bene quante mogli ha avuto, l'ultima l'ha sposata a 64 anni (avendone un figlio) e mi risulta abbia altri 6 figli, oltre che tre nipoti e un pronipote.
◇ E allora esuberante è un termine appropriato. Mi dicevi comunque della sua teoria dei surreali...
▼ Che non è stato il suo primo contributo al mondo dei giochi, in senso esteso. In realtà è diventato piuttosto famoso nei circoli esterni alla matematica per un contributo anteriore alla sua teoria dei surreali, con il suo *Game of Life*.
◇ Il salvaschermo?
▼ No, l'automa cellulare. In breve, si tratta di questo: von Neumann aveva studiato il problema di inventare una macchina teorica che potesse costruire copie di se stessa e ne propose un modello matematico che doveva seguire complicate regole su una griglia cartesiana. Conway semplificò grandemente il modello di von Neumann. In realtà si tratta di un gioco cosiddetto a zero giocatori, perché l'agente che lo vuol giocare deve solo dare una configurazione iniziale, poi il gioco si svolge tutto da sé. Scrisse Martin Gardner a proposito di Game of Life: *questo gioco ha reso immediatamente Conway famoso in tutto il mondo, ma non solo, ha anche aperto un intero nuovo campo di ricerca matematica, il campo degli automi cellulari*.
◇ Ma torniamo a noi: che cosa vuoi dirmi dei giochi di Conway?
▼ Sono giochi in cui due giocatori – L(ucchetti) e R(osolini) – si alternano a fare le mosse, tutto quel che uno fa è visibile all'altro, non esistono informazioni private per un giocatore, il gioco si esaurisce in un numero finito di mosse.
◇ Credevo che i due giocatori si chiamassero L(eft) e R(ight).
▼ Ma perché togli sempre la poesia? Non ha importanza: L gioca di qua e R gioca di là.
◇ Per esempio, i tipici giochi con i mucchietti di fiammiferi, o il go appunto, gli scacchi e la dama, mentre mi pare si escludano i giochi di carte. Negli scacchi L è il bianco o il nero?

▼ L è semplicemente uno dei due giocatori, e R è l'altro: non è specificato chi debba cominciare: L può essere quello che gioca bianco o quello che gioca nero. Sono giochi, come dicevo, a informazione perfetta. Nel bridge e nel poker, per esempio, tu sai che carte hai in mano, ma non sai quelle dell'avversario: queste sono informazioni private, e la teoria di Conway non si occupa di questi.
◇ E chi vince?
▼ Ottima domanda: un gioco è determinato solo quando specifichi le preferenze dei giocatori sugli esiti finali. In questi casi semplici il tutto si riassume appunto nella domanda: chi vince? Si assume infatti che ai giocatori interessi vincere. Conway considera perdente un giocatore che non ha più mosse disponibili: lo scacco matto, ma in gergo si chiama la *Normal play convention*.
◇ Il che significa che esistono altre regole...aspetta, un'altra regola potrebbe essere che chi fa l'ultima mossa perde. Per esempio, se ci sono oggetti da prelevare sul tavolo, chi è costretto a prendere l'ultimo perde.
▼ Esatto! Questa regola invece è chiamata *Misère play convention.*
◇ E vai con la poesia... Perché Conway si è occupato della prima?
▼ Davanti a una birra è lecita la risposta brutale: perché con la regola normale si può fare una teoria generale che non si può fare nel secondo caso. O forse, a essere prudenti, è meglio dire che nel secondo caso non c'è stato ancora un Conway 2 che ha inventato una teoria generale.
◇ E come definisci la somma di due giochi? Visto che li vuoi trattare come numeri...
▼ Prima definiamo qualche numero-gioco. Cominciamo da 1: è il gioco dove L ha una sola mossa e R non ne ha neppure una.
◇ Immagino che –1 sia il gioco dove R ha una sola mossa e L non ne ha neppure una.
▼ Immagini benissimo. Il gioco 0 è il gioco dove non ci sono mosse per i giocatori.
◇ Ma 1 + (–1) non fa 0!
▼ Quello che hai appena detto dipende da molte variabili: che cosa è il gioco somma $A + B$? E poi, soprattutto, come confronto due giochi? Detto in modo formale: quand'è che due giochi sono uguali?
◇ I giochi di Conway mi piacciono sempre di più: aspetta! Provo a dirti la somma di due giochi: il gioco somma $A + B$ è il gioco dove ogni giocatore, al suo turno, può decidere di avanzare in uno dei due giochi, quello che vuole. E, per vincere, può anche perdere in uno dei due, basta che questo succeda prima della sua vittoria nell'altro.
▼ Bravo! Devo ammettere però che mi sembra di sentire puzza di bruciato: hai indovinato la definizione di Conway.
◇ Be', hai ragione: i giochi di Conway sono stati lo strumento fondamentale

per risolvere un difficile problema aperto in informatica teorica, la caratterizzazione del modello pienamente astratto del lambda-calcolo di Church...
▼ Che stava pure lui a Princeton.
◇ Sì. Ma la soluzione del problema non l'ha trovata lui, fu trovata pochi anni fa da tre gruppi distinti di ricercatori, in modo indipendente. Due di quelli usavano metodi e strumenti basati sui giochi di Conway. Ricordavo qualcosa della somma di giochi da quel contesto e, nel modo in cui li stavi presentando, mi sembrava che fosse proprio quella che serviva.
▼ Che cos'è un modello pienamente astratto?
◇ È sostanzialmente il modello che, programmando in un linguaggio, un informatico si costruisce in testa per simulare gli effetti dei programmi che scrive.
▼ Non è una definizione?!
◇ No, ma quella è troppo difficile per raccontartela qui. Lascia perdere e torniamo alla somma di giochi. È anche abbastanza intuibile: se, giocando a dama, ci ritroviamo a un certo punto con solo pedine in due zone totalmente separate della damiera (diciamo su caselle in angoli diagonalmente opposti), da quel punto in poi il nostro gioco è fatto di due giochi separati e ciascuno di noi può decidere se muovere in uno o nell'altro: mi sta bene che questo sia la somma dei due giochi più piccoli.
▼ Anche se la fine non è proprio la stessa. Per vincere, devi vincere in entrambe le zone.
◇ È vero.
▼ Un esempio migliore è quello del tavolo rotondo, che funziona così: c'è una cena importante, e dobbiamo sistemare le coppie famose a un grande tavolo rotondo. Le regole sono: ogni dama sta alla destra del suo cavaliere, e non sia mai che una dama abbia alla destra un cavaliere: perde chi tra me e te (L e R) al suo turno non può più sistemare una coppia. Ora supponi che io inizi e sistemi una coppia (dove non importa, il tavolo è rotondo...), poi tu ne sistemi un'altra. Ora il tavolo è diviso in due parti, delimitate dalle due coppie sistemate. Io adesso posso scegliere *sia* in quale parte sistemare la mia coppia, *sia* dove: sono di fronte a una somma di giochi, perché in particolare posso scegliere da che parte mettere la coppia, cioè in che sottogioco giocare. E così via.
◇ Hai ragione! È proprio un bell'esempio. Lasciami provare a fare la somma di 1 e –1: è il gioco dove il primo giocatore fa l'unica mossa che gli risulta possibile, poi il secondo fa l'unica mossa che può fare. Vince comunque il secondo!
▼ Anche nel gioco 0 vince sempre il secondo.
◇ Bella forza! Il primo perde soltanto perché non può iniziare.
▼ Certo, ma proprio questa è la caratteristica che permette di stabilire se un gioco non è 0, bisogna che non abbia una strategia vincente per il secondo

giocatore. Un gioco non vale niente, cioè è lo stesso che 0, se ha una strategia vincente per il secondo giocatore.
◇ Non è una cattiva idea. A che cosa serve giocare per primo se si finisce solo per perdere?
▼ Scommetto che, se ti dico che l'opposto di un gioco si calcola scambiando tutte le mosse dei due giocatori, ti immagini come confrontare due giochi qualunque A e B.
◇ Vuoi dire che l'opposto del gioco degli scacchi è lo stesso con la scacchiera ruotata?
▼ Sì.
◇ Mi sa che due giochi A e B sono da considerarsi uguali se il gioco $A + (-B)$ è come il gioco 0, cioè se il secondo giocatore ha una strategia vincente nel gioco $A + (-B)$. E, per controllare se può funzionare, provo a verificare che la somma è commutativa, che i due giochi $X + Y$ e $Y + X$ sono uguali. Cerco una strategia vincente per il secondo giocatore nel gioco $(X + Y) + (-(Y + X))$. Ma è più facile di quello che pensavo: il secondo giocatore copia nell'altro gioco ogni mossa fatta dal primo
▼ Ho vinto la scommessa. Per premio ti do la mia assicurazione che funzionano tutte le altre proprietà della somma: associativa, elemento neutro, opposto. Così non le devi controllare.
◇ Ma se i conti si fanno più o meno come con la commutativa... Nel gioco 1 chi ha una strategia vincente?
▼ L: se gioca per primo, dopo la sua (unica) mossa, R non ne ha nessuna. Se R gioca per primo, non ha mosse comunque.
◇ E L vince per abbandono. Bellissimo!
▼ Nel gioco –1, R ha una strategia vincente.
◇ Certo, che è la copiatura di quella di L in 1. Fammi qualche gioco più complicato.
▼ Faccio prima: te li definisco tutti! L'idea di fondo è che, dopo una mossa, un gioco è diventato un altro gioco dove ci sono mosse per ciascuno dei due giocatori. Bada bene che non so chi fra L e R fa la prima mossa; perciò il nuovo gioco (quello della seconda mossa) deve prevedere opzioni sia per L che per R!
◇ Giusto! Devo ammettere che, se non faccio attenzione, penso sempre che posso stabilire quali tra L e R sia il primo giocatore e poi scrivere soltanto le opzioni alternativamente. Ma è un errore da evitare: ogni gioco, *prima* di essere giocato, è come una moneta prima di essere lanciata: ha due facce.
▼ Allora, il primo concetto fondamentale è che ci sono due giocatori, chiamati L(eft) e R(ight). Il secondo è che un gioco è completamente descritto se ti dico quali sono le opzioni O^L che può scegliere L e quali sono le opzioni O^R che può scegliere R. In altre parole, quel gioco è costituito dalla coppia (O^L, O^R).

◇ Cioè ogni gioco è una coppia di opzioni di gioco, ciascuna opzione essendo un gioco a sua volta?

▼ La formalizzazione di un gioco per Conway è un inno alla ricorsività! Le opzioni O^L e O^R sono collezioni di giochi: è come se per spiegarti il gioco degli scacchi, invece di dirti le regole di come si spostano i pezzi, ti facessi vedere tutte le mosse iniziali di un lato e tutte le mosse iniziali dell'altro, dicendoti quelli sono nuovi giochi. E poi ti spiego quei nuovi giochi facendoti vedere per ciascuna prima mossa di un lato tutte le possibili mosse dell'altro. E via di questo passo...

◇ Per fortuna che una partita a scacchi finisce sempre.

▼ Questa è l'ultima condizione che Conway impone sui suoi giochi: ogni partita *deve* finire.

◇ Ora è il solito trucco quello che da nulla genera giochi. L'insieme vuoto $\emptyset$ di opzioni è un gioco, dunque $(\emptyset, \emptyset)$ è un gioco. Ed è il gioco 0 dove nessuno dei due giocatori ha una mossa e il secondo giocatore ha una strategia vincente: stare a guardare.

▼ Conway ha introdotto una comoda notazione per i giochi: scrive le due collezioni di opzioni tra parentesi graffe, separando con una sbarra le opzioni di un giocatore da quelle dell'altro: quelle di L sono a sinistra della sbarra, quelle di R sono a destra della sbarra. È un insieme a due facce $\{G_1^L, G_2^L, \ldots | G_1^R, G_2^R, \ldots\}$.

◇ Perciò 0 si scrive $\{|\}$, 1 si scrive $\{0, |\}$, –1 si scrive...

▼ Ma sì, non vorrai star qui a scrivere tutti i giochi?

◇ Aspetta: 2 è 1 + 1, cioè $\{1 \,|\}$. Ma questo è uguale a $\{0, 1 \,|\}$, come per i naturali di von Neumann. Be', per quel che ricordo, si rappresentano tutti i numeri reali, in effetti tutti i numeri iperreali, e tutti i cardinali con i giochi di Conway.

▼ E gli esempi di prima ti hanno fatto vedere che possono succedere quattro cose diverse. Ogni gioco cioè ricade in una delle seguenti 4 categorie:

- L vince, a prescindere da chi comincia;
- R vince, a prescindere da chi comincia;
- il primo a tirare vince, chiunque sia;
- il secondo a tirare vince, chiunque sia.

È facile vedere che sono esaustive. Questo, e qui comincio a tagliare alla grande altrimenti ci tocca stare qui due giorni, permette di definire un ordine sulla classe dei giochi.

◇ Sono contento di notare il tuo rispetto per le questioni fondazionali. I giochi di Conway formano una classe che non può essere un insieme.

▼ Ovviamente no! Dato un qualunque insieme di giochi, lo puoi usare per definire un nuovo gioco dove quell'insieme sono le opzioni di L e non ci sono opzioni per R. Perciò gli insiemi di giochi sono almeno tanti quanti i giochi.

◇ C'è altro di interessante in questa teoria che riesci a spiegarmi qui seduti al tavolo del bar?
▼ Almeno due cose, una certamente indispensabile. Visto che si parla di giochi, sarebbe interessante che la teoria servisse a trovare la soluzione di un certo numero di giochi. Ovviamente sperare che d'improvviso giochi complicati con la teoria di Conway si risolvano facilmente sarebbe ingenuo, ma si può certamente tentare di sviluppare ancora un po' l'idea di gioco per introdurre *semplificazioni* nell'analisi. Cosa che Conway puntualmente fa, ma non entriamo nei dettagli che tra l'altro conosco poco anche io. La seconda cosa, molto interessante dal punto di vista teorico, è che Conway sviluppa l'idea che particolari giochi possono essere chiamati «numeri» e finalmente mostra che questa sottoclasse di giochi può essere dotata di struttura di campo ordinato.
◇ Fermiamoci qui, è meglio. Piuttosto, all'inizio mi hai detto che questa doveva essere la volta in cui tiravi un po' le somme sulla teoria dei giochi. Quali sono dunque le tue personalissime conclusioni di cui mi vuoi parlare?
▼ Più che conclusioni, diciamo che sono gli aspetti che fanno sì che questa teoria mi piaccia studiarla, capirla, qualche volta spiegarla, e raccontarla anche a chi di matematica non vuole intendersene, per far capire che la matematica non è solo formule, e che dietro le formule non ci sono solo problemi «noiosi» che possono appassionare solo un ristretto numero di persone strane.
◇ Dai, non sei davanti a un microfono, non perderti e dimmi quel che vuoi dire senza tanti fronzoli.
▼ Si tratta di una teoria, quella dei giochi, che ti permette di spaziare in tanti ambiti, i più lontani. Se sei esperto di teoria dei giochi, puoi fare le cose più astratte, oppure le applicazioni più concrete. Conway ci ha già fatto vedere che per analizzare certi giochi si possa fare una teoria molto astratta... Vuoi un altro esempio del fatto che la teoria è intimamente collegata ai fondamenti della teoria degli insiemi?
◇ Vuoi dire l'assioma di determinatezza?
▼ Sì. Ecco un gioco interessante: tu e io diciamo a turno, per infinite volte, 0 o 1. Chiamiamo $s(n)$ il numero detto all'n-esimo turno (quindi se n è pari lo dico io, se n è dispari tu che hai cominciato) e alla fine...
◇ A patto che non ci prendano per scemi a sentirci dire 0, 1, 1, 1, 0, 1, 0, 0, ...
▼ E non rompere! Lo devi *pensare* questo gioco, mica giocare materialmente!
◇ Però questo è un gioco che cade fuori dalla teoria di Conway.
▼ Sì, ma perché mi sono messo a parlare con un logico... Alla fine scriviamo il numero reale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{2^n}$$

◇ Insomma, scriviamo il numero, in notazione binaria, «zero-virgola» seguito dalle cifre $s(1)$, $s(2)$, ... in ordine[1]. Quindi un numero compreso tra zero e uno. Infatti, deve esser per forza positivo, e se dicessimo sempre 1 verrebbe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$, che fa appunto 1. OK, hai spiegato le regole, abbiamo capito i possibili esiti finali, ma adesso, come mi hai insegnato, devi dirmi le nostre preferenze sugli esiti.

▼ Esatto. Si gioca così: si fissa un sottoinsieme A dell'intervallo $[0,1]$; tu e io diciamo a turno 0 o 1; tu vinci se il numero finale scritto sopra, $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{s(n)}{2^n}$, cade dentro A, altrimenti vinco io.

◇ Chiaro, per esempio se $A = \left[0, \frac{2}{3}\right]$ ho una strategia vincente anche se non lo giochiamo materialmente: ma a parte questa banale osservazione, fammi un po' ricordare come si può classificare un gioco simile. Tu lo chiameresti a informazione perfetta, visto che ogni mossa è ben nota a tutti, con due giocatori, tra l'altro il pareggio non è possibile, quindi vince o l'uno o l'altro, siamo nell'ambito del teorema degli scacchi. O forse no! Questo gioco è infinito.

▼ Appunto. Ora ti propongo l'enunciato seguente:

> Per ogni insieme A di reali compresi tra zero e uno, esiste una strategia vincente nel gioco per uno dei due giocatori.

◇ Esattamente quello che afferma il teorema degli scacchi: ci deve essere un vincitore, sempre lo stesso. E tu pensi che l'affermazione precedente sia vera?

▼ Dipende.

◇ Prendi in giro? No, aspetta: vuoi dire dipende dal *mondo* in cui ti vuoi collocare.

▼ Esatto! Perfetto! Hanno dimostrato che l'asserto precedente è incompatibile con l'assioma della scelta, nella teoria assiomatica degli insiemi detta di Zermelo-Fraenkel.

◇ E tu vivi nel mondo in cui si usa AC?

▼ Lascia perdere, parliamone un'altra volta. Piuttosto, per finire il mio discorso, vorrei ancora dirti che la teoria è però anche utilizzata in maniera

[1] Se non si è a proprio agio con la notazione binaria, si può modificare il gioco: all'n-esimo turno, si sceglie una cifra $s(n)$ tra le dieci a disposizione; alla fine, si scrive il numero reale:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s(n)}{10^n} = 0, s(1)s(2)s(3)\ldots$$

molto concreta per risolvere problemi «pratici». Ti vorrei fare alcuni esempi, magari un'altra persona ne sceglierebbe altri, questi riflettono soprattutto miei interessi personali, ma credo che siano anche significativi.

◇ Smettila di parlare come se facessi lezione, e soprattutto non mi rompere le scatole con le solite applicazioni all'economia.

▼ Ma che economia! In questo campo gli esempi sono scontati, e poi non è che mi interessi granché. Comincio con un paio di esempi in medicina, che hanno qualche caratteristica in comune. Quando uno si laurea in medicina, deve spesso fare un internato in un ospedale. A parte il metodo di avere un parente medico che ti dà una mano, che forse può essere utile a te personalmente, almeno se hai buone conoscenze, ma che non è molto efficiente dal punto di vista sociale, la domanda spontanea è se esistono modi efficaci di trattare la questione in modo centralizzato: diciamo un'agenzia che raccoglie domande dei medici, disponibilità degli ospedali e procede alle assegnazioni. Questo è un interessante problema di *matching*, la cui «soluzione» è stata brillantemente trovata da due famosi esperti della teoria dei giochi.

◇ Perché hai detto soluzione con quella voce?

▼ Bene, sono contento che tu l'abbia notato, perché il primo punto della questione sta proprio nel capire che cosa sia una soluzione in questo caso. Una volta capito, si tratta poi di capire se esiste sempre una soluzione, e nel caso non sia unica, se alcune soluzioni privilegiano qualcuno.

◇ Scusa, che vuol dire privilegiare qualcuno?

▼ Ricordati bene che siamo in una situazione interattiva, il che implica che, diversamente da quando si è soli, i giocatori potrebbero non essere indifferenti tra le varie soluzioni possibili... in una mi potrebbe toccare molto, in un'altra molto poco. Nell'esempio precedente, potrebbe esserci, anzi c'è proprio, una soluzione che è la più gradita ai medici, un'altra che è la più gradita agli ospedali. Non coincidono quasi mai...

◇ È stata utilizzata questa procedura? O è rimasta solo una brillante idea?

▼ Certo che lo è stata, che ne sappia io negli Stati Uniti e in Turchia, in questo Paese per regolamentare l'accesso degli studenti alle Università. Naturalmente la procedura proposta spesso arriva a un momento di crisi, il che è un'ottima cosa.

◇ E perché?

▼ Da un punto di vista molto egoistico, perché questo dà agli esperti nuovo materiale di lavoro! Se la vuoi mettere più carina, il mondo è in costante evoluzione, e quindi modelli efficaci trent'anni fa oggi non lo sono più. Si tratta allora di introdurre modelli più sofisticati, che tengano conto di aspetti trascurati da quello precedente. Un altro aspetto interessante legato alla medicina, e non lontano dalla problematica precedente, riguarda i trapianti di rene.

◇ Faccio fatica a vedere il nesso.

▼ E aspetta un attimo! Lasciami spiegare. C'è sempre più bisogno di reni. Questo è un fatto naturale: si vive sempre di più, il che è un grande progresso, ma più persone anziane significa anche più problemi di salute (anche se purtroppo a volte si ammalano anche le persone giovani). Ci sono liste sempre più lunghe di persone in attesa di trapianto di rene, spesso l'unica speranza di sopravvivenza a medio-lungo termine. Ora, un rene si può ottenere in due modi diversi: da cadavere, oppure da donatore vivente, visto che con un rene solo si può vivere benissimo (c'è un famosissimo giocatore di basket NBA che gioca con un rene solo). Quelli da cadavere, non bastano. Sarebbe altamente meritorio promuovere continuamente campagne che convincano alle donazioni ogni volta che sia possibile, ma non basteranno mai. Si passa allora alle donazioni da vivente, che fino a poco tempo fa avvenivano solo tra consanguinei. Ora, si è arrivati allo scambio.

◇ Allo scambio? Vuoi dire che se tu e io abbiamo bisogno del trapianto, ma io non posso ricevere quello del mio donatore e lo stesso succede a te, potremmo scambiarcelo?

▼ Certo, ovviamente a condizione che il tuo mi sia compatibile e lo stesso accada per te.

◇ Effettivamente è una cosa interessante.

▼ Non è difficile capire quanto una problematica di questo tipo sia delicata, quanto, da un certo punto di vista, problemi etici (seri e importanti, sia chiaro) abbiano prevalenza su quelli matematici, ma perché non utilizzare anche la matematica per avere più strumenti a disposizione?

◇ Capisco, anche se avrei detto che non sono esattamente problemi di teoria dei giochi, mi sembrano più problemi di matematica discreta, a occhio un problema di questo tipo dovrebbe essere affrontabile studiando grafi e facendo *matching* su grafi.

▼ Matching, appunto, ecco il legame con il problema precedente. Comunque gli esperti di teoria dei giochi usano anche grafi: in fondo la rappresentazione più naturale di un gioco in forma estesa è quella ad albero, un particolare tipo di grafo. Ma non è questo il punto più importante: ricorda che siamo comunque in presenza di «agenti che interagiscono», e cioè la situazione paradigma della teoria dei giochi. Un problema che solo un esperto di teoria dei giochi ha, per esempio, è di capire se lo studio del meccanismo di assegnazione dei reni ai pazienti sia *strategy-proof*: questo significa che le persone coinvolte nel processo non abbiano incentivo a mentire. Esistono meccanismi che non incentivano a mentire, altri invece che in determinate situazioni ti potrebbero far mentire.

◇ Mi puoi fare un esempio di incentivo a mentire?

▼ Semplifico moltissimo, ma supponi che io sappia che il meccanismo introdotto mi dia un'altissima probabilità di essere tra i primissimi nella lista. A questo punto potrei dichiarare cose non vere per cercare di ottenere un rene migliore, per esempio quello di una persona giovane. Oppure di nascondere un mio potenziale donatore (se ne possono proporre più d'uno, in certe situazioni).

◇ Effettivamente sembra una cosa interessante, ma è stata messa in pratica?

▼ Eccome! Sono stati fatti scambi, per esempio in Italia ce ne è stato uno triplo, ma negli Stati Uniti (e non solo, anche in Olanda, per esempio), ci sono proprio programmi per l'implementazione sistematica di questi metodi. Uno, nel New England, è diretto da un esperto in teoria dei giochi, come responsabile di una clinica che si dedica a questi trapianti.

◇ In Italia?

▼ C'è interesse, anche se siamo indietro e se si levano voci contrarie, anche molto contrarie, a questo tipo di procedure. Ovviamente io sono favorevole, ma mi rendo conto che i problemi sono assolutamente non banali, e che il dubbio *deve* essere sempre presente nel nostro pensiero. Purtroppo spesso non lo è negli interlocutori più rigidi e ideologizzati, ma evitiamo questa discussione.

◇ È quasi ora di andare.

▼ Dai, ti faccio ancora un paio di esempi, brevemente. Il primo riguarda applicazioni della teoria dei giochi alla genetica. Forse te ne ho già accennato. In poche e imprecisissime parole, si tratta di questo. Le nuove tecnologie, applicate alla genetica, permettono di collezionare quantità impressionanti di dati, relativi alla mappatura genetica delle persone. Si tratta di avere, per una singola persona, dei dati relativi ai suoi 20.000-30.000 geni. Puoi immaginare che quindi si dispone di una mole gigantesca di dati.

◇ E allora?

▼ Il problema è che poi questi dati bisogna che siano letti e interpretati, e la cosa non è per niente facile. Hai certamente sentito parlare di malattie di origine genetica. Non è facile né stabilire quali lo siano, né soprattutto quali geni siano coinvolti nell'insorgenza della malattia. Ci sono malattie che hanno un unico gene responsabile, e allora non è difficile individuarlo. Ma altre, magari molto meno gravi e più comuni, sono causate da un pool di geni, e individuarli qui è molto più difficile. Ho sentito Boncinelli dire durante una conferenza che di una malattia molto comune, mi pare una qualche allergia, si conoscevano una dozzina di geni corresponsabili, anzi, ha aggiunto: «Visto che è da un po' che non me ne occupo, ora magari saranno anche una quindicina». Insomma, è chiaro che queste sono cose complicate. Ora, recentemente sono state elaborate teorie, ancora in continua evoluzione, che permettono, tramite strumenti e concetti della teoria dei giochi, di proporre un altro metodo per individuare geni potenzialmente responsabili di qualche malattia. Ovviamente si tratta di elucubrazioni, per ora, e di uno dei tanto metodi possibili. Però sono convinto che, data la complessità di tutta la questione, avere più metodi, per poi magari incrociare i risultati per vedere se ci sono correlazioni statistiche interessanti su quanto ottenuto, sia comunque importante.

◇ Certo che ne è stata fatta di strada dai primi giocatori razionali di Nash, visto che in questo modello sospetto che i giocatori siano i geni...

▼ Sospetti benissimo. Forse te l'ho già detto, ma il grande Nash ha avuto l'intuizione, già nella sua tesi di dottorato, di accennare al fatto che la teoria potesse essere anche applicata a *popolazioni*, per esempio specie animali, con gli stessi strumenti e le stesse idee di base.

◇ Insomma, per lui niente di nuovo...

▼ Mah, forse c'è qualcosa che nemmeno lui si immaginava. Il CLUBMED game è un recentissimo modello, che dato il nome può evocare giochi che invece non c'entrano nulla con il modello in questione, ma un problema (forse un po' meno popolare) di telecomunicazioni: anche i computer e le connessioni Internet «giocano».

◇ Mi sembra una degna conclusione, insieme all'osservazione che a volte gli acronimi sono la cosa più interessante di certi lavori, cosa certamente non vera in questo caso. D'altra parte, è ora di tornare a casa. Alla prossima.