

# Giochi strategici: matematica tra psicologia, filosofia e applicazioni concrete

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano

Cesenatico 3 Maggio 2019



# Definizione di Gioco

Un gioco può essere descritto come una situazione in cui:

- 1 ci sono dei giocatori, in genere almeno due;
- 2 c'è una ben definita situazione iniziale;
- 3 esistono regole di comportamento per i giocatori;
- 4 il processo termina con un certo numero di situazioni finali;
- 5 i giocatori hanno delle preferenze sulle situazioni finali.

Questa descrizione si adatta a tante situazioni quotidiane!

# Gli assiomi della teoria

Le ipotesi di base:

I giocatori sono:

- ▷ egoisti;
- ▷ razionali.

# Egoismo

I giocatori si occupano **esclusivamente** delle loro preferenze personali, quelle degli altri sono prese in considerazione **solo** per cercare di fare le scelte migliori per sé.

Va messo in evidenza che egoismo qui non si intende in senso etico. La simpatia nei riguardi dell'altro può essere osservata anche in un giocatore ipotizzato dalla teoria: basta tenerne conto esprimendo le preferenze sugli esiti del gioco.

# Razionalità

Definire che cosa significhi comportamento razionale è il primo compito della teoria dei giochi.

In parole imprecise: i giocatori

- Capiscono le regole del gioco e hanno preferenze coerenti su tutti i suoi esiti possibili;
- sanno analizzare le conseguenze delle proprie azioni e di quelle degli altri, sanno che anche gli altri giocatori hanno le stesse caratteristiche, e sanno analizzare le conseguenze che queste ipotesi comportano, in una regressione senza limiti;
- usano la teoria della probabilità in maniera consistente in presenza di eventi casuali, e se devono diversificare le loro scelte;
- estendono a un contesto interattivo la classica teoria dei giochi.

## Sulle preferenze: l' ultimatum game

- Al primo giocatore viene detto che ha a disposizione 1000 Euro, e deve offrire almeno un Euro al secondo giocatore;
- Il secondo giocatore ha due opzioni, o accettare o rifiutare;
- Se il secondo accetta, la divisione dei 1000 Euro avviene sotto la supervisione di un garante;
- Se il secondo rifiuta, i 1000 Euro vengono persi.

Quale è l'offerta giusta?

*The Neural Basis of Economic Decision Making in the Ultimatum Game* Sanfey et al. Science 2003 pages 1755-1758 citazioni  $\geq 3000$

Il lavoro descrive l' esperimento in cui è stata usata la FMRI sul secondo giocatore per vedere quali parti del cervello reagiscono a seconda se la proposta viene accettata o rifiutata.

I ricercatori hanno osservato che il rifiuto si verifica durante un'attività più accentuata della [Anterior Insula](#), l'accettazione della [Dorsolateral Prefrontal Cortex](#): emotività VS razionalità.

## Ancora sulle preferenze

In *Cues of being watched enhance cooperation in a real-world setting* (Biol. Lett. 2006 pages 412-414), gli autori hanno fatto l'esperimento seguente:

- In una stanza di un dipartimento con una macchina per il caffè chiunque poteva servirsi;
- accanto alla macchina c'era una scatola per la raccolta dei soldi da pagare per caffè, latte e zucchero;
- a settimane alterne veniva messo sopra la macchina un quadro con dei fiori o un quadro con degli occhi in primo piano.

I risultati sono stati clamorosi: durante le settimane con gli occhi sopra la macchina si raccoglieva in media il triplo di denaro!

Per questa ragione le preferenze dei giocatori sono dati molto difficili da conoscere con precisione: la teoria comunque inizialmente suppone che queste siano date e note a tutti.

## Una prima ipotesi di razionalità

Un giocatore **non** sceglie un'azione  $z$  se ne ha disponibile un'altra,  $x$ , tale che l'esito finale ottenuto scegliendo  $x$  è meglio per lei dell'esito ottenuto con  $z$ , **qualunque** siano le scelte degli altri giocatori.

Chiamata  $f(x, y)$  la funzione di utilità del giocatore, che sceglie  $x$  e in cui la variabile  $y$  riassume le scelte degli altri, l'ipotesi afferma che  $z$  non viene scelta dal giocatore se esiste  $x$  tale che

$$f(x, y) > f(z, y) \quad \forall y.$$

Chiara l'estensione della teoria delle decisioni, dove il decisore è solo, e dunque **non** dipende da  $y$ : in questo caso il decisore semplicemente massimizza la funzione di utilità.

# Qualche conseguenza 1

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (101, 0) \\ (0, 101) & (100, 100) \end{pmatrix}$$

Un giocatore, detto primo giocatore, sceglie una riga, l'altro una colonna, la coppia di numeri così determinata rappresenta le utilità dei giocatori, in rosso quella del primo.

La tabella precedente è una sintesi straordinaria della filosofia contenuta in uno dei più importanti libri di filosofia sociale.

*In such condition there is no place for industry, because the fruit thereof is uncertain, and consequently, not culture of the earth, no navigation, nor the use of commodities that may be imported by sea, no commodious building, no instruments of moving and removing such things as require much force, no knowledge of the face of the earth, no account of time, no arts, no letters, no society, and which is worst of all, continual fear and danger of violent death, and the life of man, **solitary, poor, nasty, brutish, and short.***

T. Hobbes, Leviathan 1651

L'esempio più famoso di gioco di questo tipo è il **Dilemma del prigioniero**

## Qualche conseguenza 2

Ecco due giochi, dove i giocatori hanno due scelte a disposizione (alto-basso per il primo, sinistra-destra per il secondo), in entrambi i casi:

$$\begin{pmatrix} (10, 10) & (3, 15) \\ (15, 3) & (5, 5) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (8, 8) & (2, 7) \\ (7, 2) & (0, 0) \end{pmatrix}.$$

Per ogni combinazione di scelte dei giocatori, nel primo gioco, entrambi i giocatori ottengono di più che nella stessa combinazione di scelte nel secondo. Però:

In certi casi è conveniente per entrambi giocare nello scenario peggiore!

## Qualche conseguenza 3

Ecco due giochi:

$$\begin{pmatrix} (10, 10) & (3, 5) \\ (5, 3) & (1, 1) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (1, 1) & (11, 0) & (4, 0) \\ (0, 11) & (10, 10) & (3, 5) \\ (0, 4) & (5, 3) & (1, 1) \end{pmatrix}.$$

Nel secondo i giocatori hanno la possibilità di ottenere **le stesse** utilità, **ed altre ancora**. Ma

**In certi casi avere meno possibilità di scelta è più conveniente per entrambi i giocatori!**

## Oltre l'eliminazione di strategie dominate

Il criterio di eliminazione delle strategie dominate, pur portando a conseguenze paradossali, ha limitata applicabilità: di solito l'efficacia di certe scelte da parte di un giocatore dipende dalle scelte degli altri giocatori.

Come andare oltre?

Dipende dal tipo di gioco, e da come lo si descrive.

## Il gioco dei tre politici

Tre politici devono votare, con voto palese e in sequenza, se aumentare oppure no i loro salari. La prima scelta è di avere l'aumento, ma preferirebbero votare no per fare bella figura

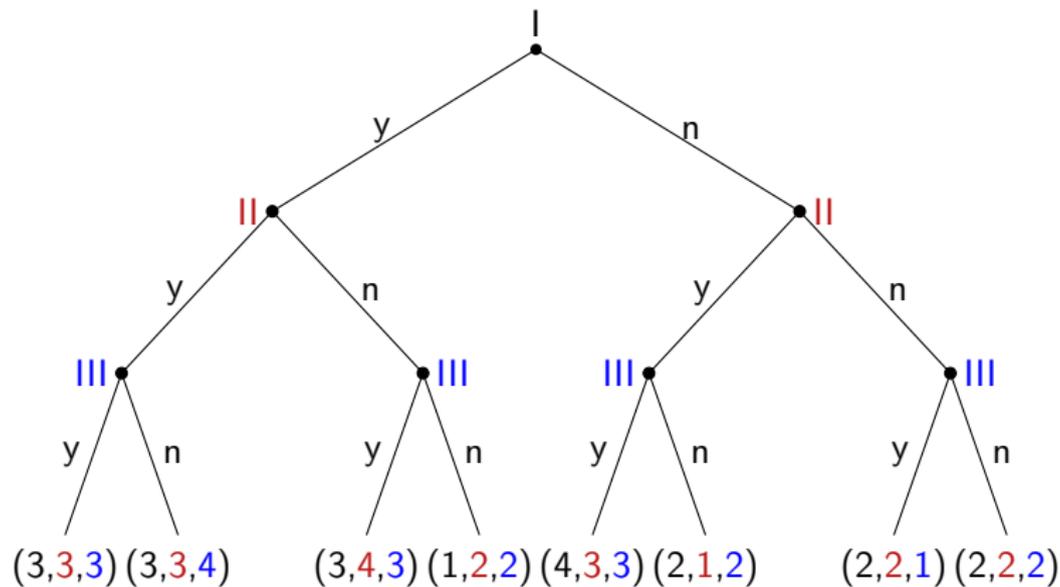


Figura: Tre politici

# Come si trova l'esito razionale

Si usa il metodo di **INDUZIONE A RITROSO**: partendo dalle situazioni che portano a un esito finale, e risalendo nell'albero, si arriva a descrivere quale sarà il comportamento di persone razionali.

Nel gioco dei tre politici si deduce facilmente che cosa farebbe il giocatore III in ognuno dei nodi dove potrebbe essere chiamato a prendere una decisione. Questo è noto al giocatore II che quindi sa quale sarebbe la scelta più conveniente in ogni nodo in cui sia chiamato a decidere.

Risalendo alla radice, si vede che il comportamento razionale implica che il primo voterà no, mentre gli altri sì: l'analisi strategica porta a conclusioni diverse rispetto all'approccio psicologico!

# A quali giochi si applica l'induzione a ritroso?

- 1 le mosse avvengono in sequenza;
- 2 non esiste informazione privata per qualche giocatore: tutto è visibile a tutti;
- 3 i giocatori hanno un numero finito di mosse possibili in ogni fase del gioco, e il gioco termina in un numero finito di mosse.

Sono i **giochi finiti a informazione perfetta**: concettualmente la loro analisi è completa.

Che giochi famosi rientrano in questa categoria? **Tris, Go, Scacchi, Dama.**

# Ma quanto è pratico il metodo dell'induzione a ritroso?

I giochi a informazione perfetta possono essere analizzati col metodo di induzione a ritroso.

In pratica questo metodo ha applicazioni limitate, perché in genere è impossibile descrivere completamente il grafo del gioco.

A seconda delle conclusioni cui si riesce ad arrivare, in giochi a due persone con esiti possibili pareggio o vittoria di uno dei due, si distingue tra vari tipi di soluzioni possibili:

- 1 **Soluzioni molto deboli:** sappiamo che il gioco deve terminare sempre allo stesso modo, ma non sappiamo come (gli scacchi)
- 2 **Soluzioni deboli:** una dimostrazione di qualche tipo non costruttivo (per esempio basata su un ragionamento per assurdo) riesce a dire sia l'esito del gioco, ma in pratica non si sa **come** il giocatore che vince dovrebbe giocare, o come arrivano al pareggio i due giocatori (Go)
- 3 **Soluzioni:** giochi in cui effettivamente quale sia la strategia che deve usare il giocatore per vincere (giochi Nim).

## E per giochi che non ricadono nella categoria precedente?

La descrizione del gioco in forma estesa è utile ma non sempre possibile, e non aiuta nei giochi con mosse contemporanee.

Occorre un'idea più generale.

Qui compare J. F. Nash, col suo modello di gioco in forma strategica, e l'idea di equilibrio. Per due giocatori si ha:

Gioco:  $(X, Y, f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}, g : X \times Y \rightarrow \mathbb{R})$ .

Equilibrio: Un **Equilibrio di Nash** per il gioco è una coppia  $(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$  tale che:

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$  per ogni  $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$  per ogni  $y \in Y$

# La teoria cooperativa

von Neumann, qualche anno prima di Nash, aveva proposto un approccio cooperativo al problema.

I giocatori sono portati a fare coalizioni, **sempre allo scopo di ottenere benefici individuali**

Questa idea ha portato all' sviluppo della teoria cooperativa.

# In che campi si applica la teoria?

Date le premesse:

- 1) Economia: 10 esperti di teoria dei giochi hanno vinto il Nobel per l'Economia;
- 2) Scienze sociali: lo studio di come costruire un sistema di preferenze della società a partire da quello di un gruppo di individui;
- 3) Zoologia: la razionalità degli animali è evidentemente diversa da quella degli umani, ma spesso più efficiente;
- 4) Ingegneria: reti di utenti che utilizzano Internet, aste on line, networks di computers, informatica, intelligenza artificiale. . . ;
- 5) Scienze della vita: genetica, medicina;
- 6) Mechanism design: studio di meccanismi e leggi per ottenere scopi sociali desiderati ipotizzando che gli agenti coinvolti si comportino in maniera non cooperativa.

## Il problema: scambio di donatori

Occorre procurare un rene sano a persone che soffrono di gravi patologie renali.

Esistono due metodi:

- 1) rene da cadavere;
- 2) rene da donatore vivente.

## Alcuni dati

La situazione italiana:

- 1) 611 trapianti nel 1992;
- 2) 1533 nel 2009.

Le donazioni da cadavere non sono (e non saranno mai) sufficienti.

## Problemi legati alla donazione

- 1) incompatibilità sanguigna;
- 2) incompatibilità tissutale.

Le prime sono legate al gruppo sanguigno ( $O, A, B, AB$ ).

Le seconde all'HLA (human leukocyte antigens).

*Gruppo sanguigno:* Non si può ricevere una proteina ( $A, B$ ) che non è presente nel sangue.

*Tessuti:* Test delicato, costoso, che va ripetuto nel tempo.

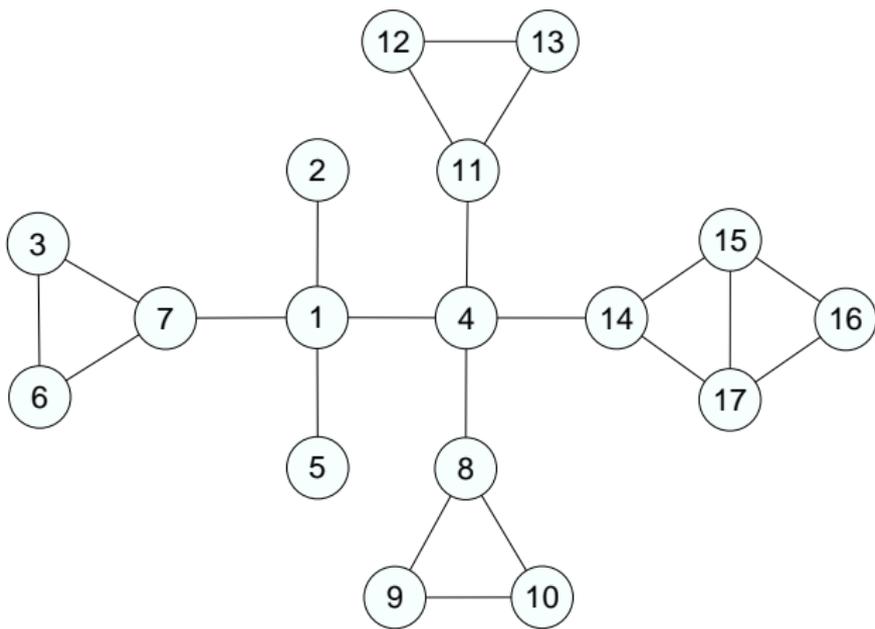
## Ipotesi generali

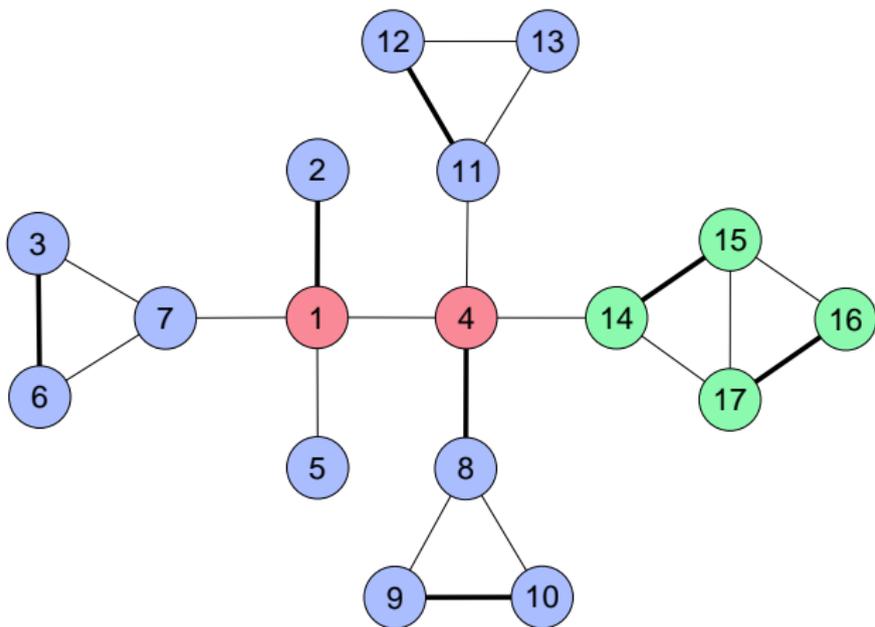
- 1) Pazienti hanno preferenze sugli organi disponibili;
- 2) possono iscriversi a una lista d'attesa;
- 3) spesso hanno un donatore vivente, ma incompatibile.

## Altre ipotesi

Possono essere considerati diversi modelli di scambio:

- 1) Scambio a coppie;
- 2) scambi multipli senza lista d'attesa;
- 3) scambi multipli con lista d'attesa.





**UNDERDEMANDED**



**OVERDEMANDED**



**PERFECTLY MATCHED**

# Top trading cycles and chains

Roth AE, *Kidney exchange*, 2004

# Preferenze

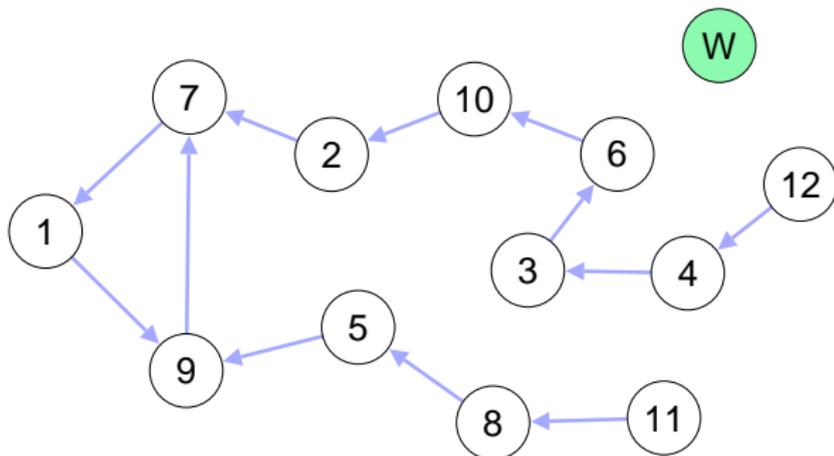
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
D9	D7	D6	D3	D9	D10	D1	D5	D7	D2	D8	D4
D4	D10	D3	D9	D3	W	D9	D3	W	D3	D1	D12
D1	W		D11	D8		D7	D11		W	D5	
			W	D2			D8			W	
				D5							

p = paziente

d = donatore

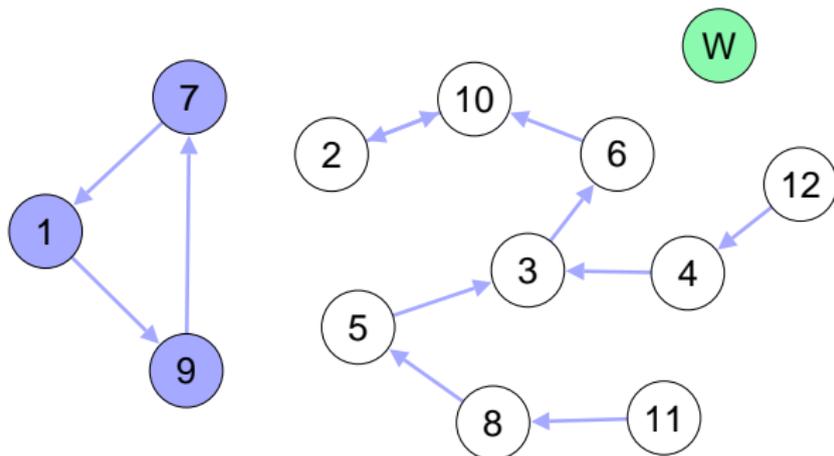
w = lista d'attesa

# Primo passo



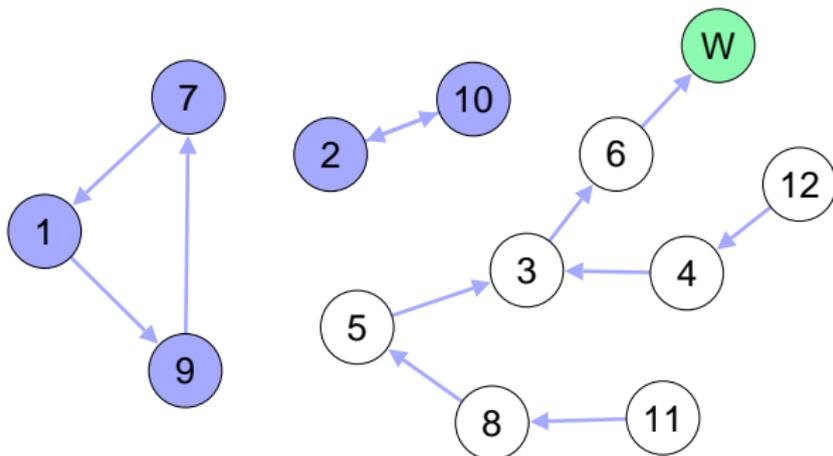
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
D9	D7	D6	D3	D9	D10	D1	D5	D7	D2	D8	D4
D4	D10	D3	D9	D3	W	D9	D3	W	D3	D1	D12
D1	W		D11	D8		D7	D11		W	D5	
			W	D2			D8			W	
				D5							

## Secondo passo



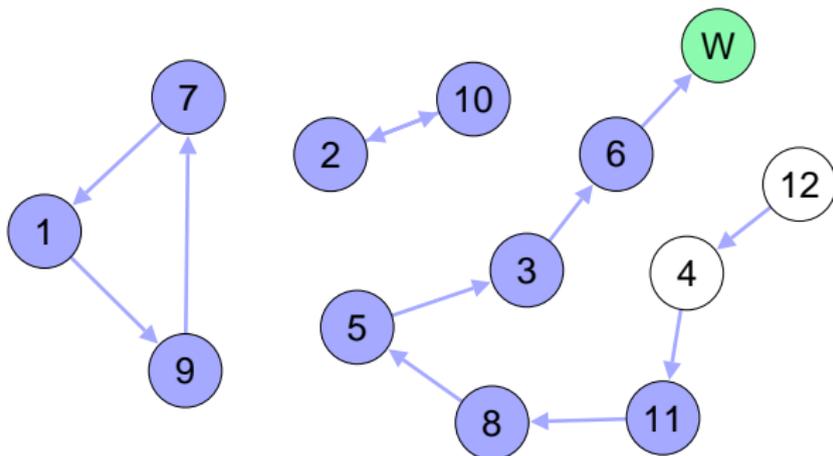
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
D9	D7	D6	D3	D9	D10	D1	D5	D7	D2	D8	D4
D4	D10	D3	D9	D3	W	D9	D3	W	D3	D1	D12
D1	W		D11	D8		D7	D11		W	D5	
			W	D2			D8			W	
				D5							

## Secondo passo (bis)



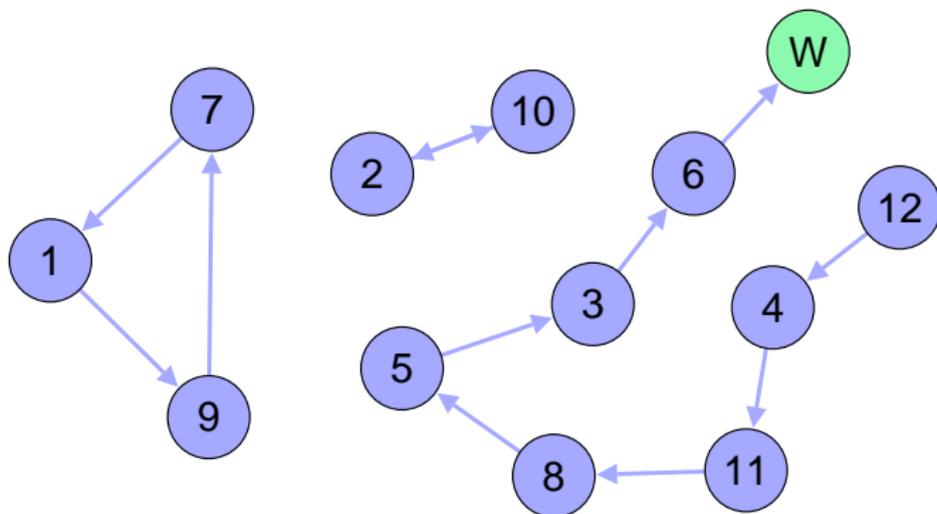
P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
D9	D7	D6	D3	D9	D10	D1	D5	D7	D2	D8	D4
D4	D10	D3	D9	D3	W	D9	D3	W	D3	D1	D12
D1	W		D11	D8		D7	D11		W	D5	
			W	D2			D8			W	
				D5							

## Terzo passo



P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
D9	D7	D6	D3	D9	D10	D1	D5	D7	D2	D8	D4
D4	D10	D3	D9	D3	W	D9	D3	W	D3	D1	D12
D1	W		D11	D8		D7	D11		W	D5	
			W	D2			D8			W	
				D5							

## Terzo passo (bis)



## La donazione samaritana

I metodi precedenti hanno il vincolo inevitabile che i trapianti devono essere eseguiti (quasi) contemporaneamente: un donatore può in ogni momento ritirare la propria disponibilità, per cui gli scambi non possono essere in momenti diversi.

Il problema non sussiste in caso di **donazione samaritana**: un donatore senza paziente associato dà inizio a una catena, che può protrarsi nel tempo. Se un donatore si ritira, interrompe una catena, ma senza danneggiare specificatamente un paziente. Nelle prossime due slides vediamo due catene create da donatori samaritani.

# 60 lives, 30 kidneys, all linked

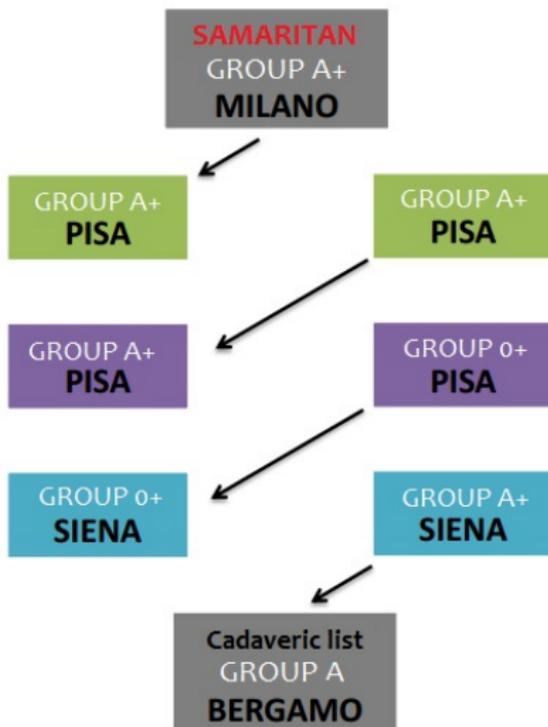


New York Times, 2012<sup>35/38</sup>

# Donazione samaritana in Italia

## RECIPIENTS

## DONORS



# Ma la matematica è versatile!

Modelli simili, che si chiamano di matching, sono utilizzati

- In US, per il problema degli interni negli ospedali;
- In Cile, per il problema di stabilire in che Università si iscrivono gli studenti;

Matthias Fiedler

**L'idea del matching  
immobiliare innovativo:  
la mediazione  
immobiliare semplificata**



**Matching immobiliare:  
la mediazione immobiliare  
efficiente, semplice e  
professionale attraverso un  
portale di matching  
immobiliare innovativo**



## Conclusione: ma che cosa è la teoria dei giochi?

Nel libro

Pragmatica della Comunicazione Umana

Paul Watzlawick, Janet Helmick Beavin e Don D. Jackson

introducono gli assiomi di base della comunicazione umana.

Il primo recita:

È impossibile evitare la comunicazione

Aggiungono poi che un'unità di comunicazione è un **messaggio**, una serie di messaggi costituisce un'**interazione**.

Di conseguenza, senza interazione praticamente la vita umana è impossibile.

La teoria dei giochi è la **matematica dell'interazione**.