Scelte sociali ben fatte

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano, Luiss Roma

Ottobre 2023

La matematica nelle Scienze Sociali

- Gli studi sul comportamento e le leggi che governano le società costituite da più individui sono molto antichi
- Questi studi erano, fino a tempi recenti, prerogativa soprattutto di filosofi
- I primi contributi fondamentali in epoche più recenti sono dovuti a T. Hobbes (Leviathan, 1651) e a J.J Rousseau (metà del diciottesimo secolo)

I primi risultati

- Nel 1770 Jean-Charles de Borda formalizza un metodo elettivo molto antico, che consiste in un voto ponderato, e che da allora si chiama metodo di Borda
- Nel 1798 Malthus pubblica *An essay of the principle of the population as it affects the future improvement of society*
- Ricardo nei primi anni dell'ottocento cerca di spiegare alcuni teorie economiche di Adam Smith con argomenti matematici elementari;
- sempre nella prima metà dell'ottocento Cournot propone un semplice modello di duopolio, che un secolo dopo suggerisce a J. Nash l'idea di gioco non cooperativo in forma strategica;
- Leon Walras nell'ultimo quarto dell'ottocento propone alcune teorie economiche, in cui studia anche il problema dell'equilibrio generale di un economia di mercato;
- Vilfredo Pareto, italiano di origini, nato in Francia e ingegnere di formazione, verso la fine dell'ottocento si occupa di economia e per i suoi importanti contributi è chiamato nel 1893 dall'Università di Losanna a sostituire Walras;
- Nel 1875 Condorcet pubblica *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix* in cui osserva il fenomeno da allora noto come paradosso di Condorcet,

Il Novecento

Finalmente nel secolo scorso l'approccio alle tematice sociali assume (anche) un carattere spiccatamente matematico.

Questi studi hanno certamente avuto un grande stimolo dallo svilupparsi della Teoria dei giochi, l'approccio matematico alla teoria delle decisioni in processi in cui sono coinvolti più agenti.

I progressi in questi studi hanno dato origine a sottodiscipline specifiche.

Nel seguito descrivo brevemente i primi contributi in tre campi diversi.

Problemi di abbinamento

- In molte circostanze è necessario abbinare a coppie elementi di due insiemi distinti:
    1. Richieste e domande di lavoro;
    2. Macchine e compiti da svolgere;
    3. Università e studenti;
    4. Studenti di un corso di studio e corsi disponibili;
    5. Interni e ospedali;
    6. Organi e pazienti;
    7. ...
- Gli abbinamenti possono essere di vario tipo: uno a uno, uno a molti, molti a molti.
- In un modello celebre di questa teoria si assume che ogni elemento di un insieme ha una classifica su quelli dell'altro insieme;
- Si assume che non ci siano scambi monetari.

Si pone allora il problema di formare coppie in maniera *intelligente*.

I primi lavori

- D. Gale & L.S. Shapley (1962) College admissions and the stability of marriages, *American Mathematical Monthly*
- Unknown author (1966) Chilean college admission system
- A.E. Roth (1984) Hospital/residents matching, *Journal of Political Economy*
- Roth Sönmez Ünver (2004) Kidney transplant program, *Quarterly Journal of Economics*
- Abdulkadiroglu Pathak Roth (2005) Boston & New York public school admissions *American Economic Review*

Roth & Shapley hanno ricevuto il premio Nobel per l'Economia nel 2012 for the theory of stable allocations and the practice of market design.

Applicazioni concrete

- 2004 – Boston School Admissions: 17.000 studenti / 140 scuole, vari livelli di entrata: K, 1, 6, 9 ($\approx$ 4000 studenti/livello)
- 2005 – New York HighSchool Admissions: 90.000 studenti / 530 scuole secondarie superiori
- 2013 – Chilean College Admissions:
  - 1.396 corsi di studio di 33 Università differenti
  - 112.608 posti + 4.299 riservati
  - 118.208 iscritti
  - 93.750 studenti assegnati alla fine del processo.

I corsi di studio dichiarano il numero di posti disponibili e i criteri per classificare gli studenti; questi sottomettono una lista di preferenze sui corsi da frequentare.

Posizione del problema: il caso di studio

Abbinamento donne & uomini

- Due insiemi: $\mathcal{W}$ and $\mathcal{M}$
- Ogni donna (uomo) in $\mathcal{W}$ ($\mathcal{M}$) ha una sua classifica sugli elementi di $\mathcal{M}$ ($\mathcal{W}$)
- Scopo: formare coppie in maniera *intelligente*.

Abbinamento uno a uno.

Per semplicità assumiamo anche:

- Ci sono tante donne quanti uomini
- Tutti fanno classifiche complete (meglio mal accompagnati . . .)

Formalmente

Definizione

Un *problema di abbinamento* *è:*

1. *una coppia di insiemi $\mathcal{W}$ e $\mathcal{M}$ di uguale cardinalità*
2. *una coppia di profili di preferenze $(\{\succcurlyeq_w\}_{w\in\mathcal{W}}, \{\succcurlyeq_m\}_{m\in\mathcal{M}})$, con $\succcurlyeq_m$ definite su $\mathcal{W}$ e viceversa*

Definizione formale di abbinamento:

Definizione

Un *abbinamento* *è una corrispondenza biunivoca tra $b : \mathcal{W} \to \mathcal{M}$.*

Un esempio

$$\mathcal{W} = \{\text{Anna}, \text{Giulia}, \text{Maria}\}$$

$$\mathcal{M} = \{\text{Roberto}, \text{Francesco}, \text{Emanuele}\}$$

Un abbinamento:

$$[(\text{Anna}, \text{Emanuele}), (\text{Giulia}, \text{Roberto}), (\text{Maria}, \text{Francesco})]\,.$$

Abbinamenti stabili

Come formalizzare l'idea di abbinamenti *intelligenti*?

Definizione

Una coppia $W - m$ non accetta un abbinamento Λ se m e W entrambi preferirebbero stare assieme piuttosto che con i partner loro assegnati in Λ.

Per esempio:

$$\Lambda = \{(m, Z), (b, W), \dots\}$$

e

$$m \succ_W b \qquad \wedge \qquad W \succ_m Z.$$

La coppia W- m non accetta l'abbinamento proposto, si ritira dal progetto collettivo e forma una coppia a sé stante.

Definizione

Un abbinamento Λ è detto stabile se non esistono coppie che lo rifiutano.

Esempio

$$\mathcal{M} = \{a, b, c, d\}, \mathcal{W} = \{A, B, C, D\}$$

Preferenze uomini

a	b	c	d
D	B	D	A
C	A	A	D
B	C	C	C
A	D	B	B

Preferenze donne:

A	B	C	D
b	b	b	b
a	d	d	c
c	a	c	d
d	c	a	a

Consideriamo i due abbinamenti Λ e Ω:

$\Lambda = \{(a, A), (b, C), (c, B), (d, D)\}$ $\Omega = \{(a, C), (b, B), (c, D), (d, A)\}$

Λ non è stabile: a–B coppia che rifiuta

Ω è stabile.

Analisi del problema

- Esistono sempre abbinamenti stabili?
- Se ne esiste sempre uno, si può affermare che è unico?
- Se non è unico, è possibile fare una gerarchia tra quelli stabili?

Esistenza

Teorema

Ogni problema di abbinamenti ammette un abbinamento stabile.

Dimostrazione

Algoritmo di visita:

1. Fase 1a) Ogni donna visita il suo uomo preferito
   Fase 1b) Ogni uomo sceglie tra le donne che lo visitano la sua preferita e la accetta provvisoriamente. Se ogni donna è abbinata a un uomo, l'algoritmo termina, altrimenti si passa alla fase 2
2. Fase 2a) Ogni donna rifiutata nella prima fase visita la sua scelta successiva in classifica
   Fase 2b) Ogni uomo sceglie tra le donne che gli si presentano e accetta la preferita se e solo se è più alta nella sua classifica di quella eventualmente accettata precedentemente. Se ogni donna è abbinata a un uomo, l'algoritmo termina, altrimenti si ritorna alla fase 2

L'algoritmo termina, e il risultato è un abbinamento stabile.

Osservazioni

1. Ad ogni stadio, una donna (se abbinata) o rimane con l'uomo dello stadio precedente, oppure con uno per lei meno preferito
2. Il contrario succede agli uomini
3. L'algoritmo genericamente permette di trovare due abbinamenti stabili!

La dimostrazione che l'abbinamento ottenuto è stabile è molto semplice: si verifica subito che nessuna donna può far parte di una coppia che obietta.

L'esempio rivisto

Preferenze uomini

a	b	c	d
D	B	D	A
C	A	A	D
B	C	C	C
A	D	B	B

Preferenze donne:

A	B	C	D
b	b	b	b
a	d	d	c
c	a	c	d
d	c	a	a

Uomini in visita:

$$\{(a, C), (b, B), (c, D), (d, A)\}$$

Donne in visita:

$$\{(a, A), (b, B), (c, D), (d, C)\}$$

Ancora un esempio

Preferenze uomini

a	b	c
A	C	B
B	A	A
C	B	C

Preferenze donne:

A	B	C
c	b	a
a	a	b
b	c	c

Uomini in visita

$$\{(a, A), (b, C), (c, B)\}$$

Donne in visita

$$\{(c, A), (b, B), (a, C)\}$$

Ma anche

$$\{(a, B), (b, C), (c, A)\}$$

Alcuni dati

Se ci sono n uomini e n donne, il numero di abbinamenti è n!

Quanti sono gli abbinamenti stabili? Di solito sono pochi!

Però esiste un metodo per generare preferenze in modo da averne molti:

Per esempio:

$$n = 8 \qquad 269, \quad n = 16 \qquad 195472 \quad n = 32 \qquad 104310534400$$

Come trattare la non unicità?

Come paragonare due abbinamenti? Una buona idea è di paragonarli dal punto di vista delle donne (o degli uomini).

Diremo che un abbinamento Δ è migliore per le donne di un abbinamento Θ se in Δ ogni donna sta con lo stesso uomo con cui è accoppiata in Θ oppure con un uomo che preferisce rispetto a quello di Θ.

La relazione di sopra introduce un ordine parziale tra abbinamenti.

Donne contro uomini

Valgono i risultati seguenti:

Teorema

Siano Δ e Θ due abbinamenti stabili. Allora
Δ è meglio di Θ per le donne se e solo Θ è meglio di Δ per gli uomini.

Dal precedente risultato si ricava anche il teorema seguente:

Teorema

L'algoritmo donne in visita trova l'abbinamento migliore per le donne tra tutti gli abbinamenti stabili, e il peggiore degli uomini. Il viceversa vale per l'algoritmo uomini in visita.

In altre parole:

L'algoritmo donne in visita assegna a ogni donna la sua prima scelta, tra tutti gli uomini abbinati a lei in qualche abbinamento stabile.

Estensioni

Le definizioni e i teoremi precedenti si estendono senza fatica al caso in cui il numero di uomini e donne non è lo stesso, e al caso in cui qualche agente proponga solo una classifica parziale (*meglio sola che mal accompagnata ...*).

Un interessante risultato stabilisce che un agente solo in un abbinamento stabile rimane solo in ogni abbinamento stabile (The rural hospital theorem).

Non è difficile inoltre estendere tutta la teoria al caso uno a molti e molti a molti.

Conclusioni

- Questo è solo un modello semplice, casi interessanti, come gli abbinamenti tra organi di donatori e pazienti in attesa di trapianto, hanno bisogno di modelli ad hoc
- Il modello presentato è statico, in molti casi è interessante avere modelli di tipo dinamico
- Esiste il problema del fatto che gli agenti potrebbero mentire sulle loro preferenze, che sono informazione privata
- Esistono altri tipi di abbinamenti molto importanti: ad esempio 4 ragazzi che devono dividersi due stanze di un appartamento: come si accoppiano? Il problema sembra molto simile, ma lo è solo apparentemente; in questo caso non sempre esistono abbinamenti stabili

Mechanism Design

La teoria dei giochi cerca di descrivere il comportamento di giocatori razionali che interagiscono in qualche forma: sugli esiti possibili dell'interazione i giocatori hanno delle prefernze, e cercheranno di usare strategie che li portino al miglior risultato individuale possibile.

Il mechanism design in un certo senso si occupa di studiare lo stesso fenomeno da un punto di vista rovesciato: quali sono le regole per fare sì che giocatori razionali con le loro scelte arrivino a determinare una situazione socialmente accettabile?

La teoria non cooperativa mostra infatti infiniti esempi in cui l'azione individuale razionale ed egoista di più individui porta a risultati collettivamente disastrosi.

Alcuni esempi di applicazioni

- Aste di ogni tipo
- Assegnazione di alloggi a studenti in un campus universitario
- La costruzione di connessioni tra un'origine e una sorgente
- La decisione se costruire o no un bene di pubblica utilità

Un primo esempio

Consideriamo il caso in cui in un campus universitario siano disponibili alcuni appartamenti, e che un certo numero di studenti faccia domanda di assegnazione. Il campus richiede loro una valutazione di ogni appartamento, che servirà per assegnare gli stessi, e che potrebbe indirettamente essere poi associata a un qualche pagamento. Per avere un caso concreto, consideriamo la tabella seguente, in cui riportiamo le valutazioni degli studenti per ogni appartamento:

	App. 1	App. 2	App. 3	App 4
Alberto	50	40	40	30
Beatrice	70	0	20	10
Carla	60	70	40	30
Emanuele	20	30	60	40
Sofia	40	30	60	50

Esempio: continua

L'Università, per compiere una scelta collettivamente efficiente, potrebbe assegnare le camere massimizzando la somma totale delle valutazioni.

Ma c'è un problema: come fa l'Università a sapere se le dichiarazioni degli studenti sono veritiere?

Lo stesso problema in un'asta per un bene: sarebbe opportuno assegnarlo a chi lo valuta individualmente di più, ma come fa una proposta a essere considerata veritiera?

Per esempio nelle aste al primo prezzo è ovvio che chi partecipa offre una cifra inferiore alla sua valutazione, nella speranza di ottenere un utilità positiva.

Un modello semplice

I dati sono

- Un insieme I di n individui (agenti, giocatori...);
- Un insieme finito A di azioni, o alternative.
- Una valutazione $v_i(a)$ per ogni agente i e per ogni azione a.

Un'autorità centrale deve scegliere un'azione, in funzione delle valutazioni dichiarate dagli individui. Lo scopo dell'autorità è di massimizzare il benessere sociale.

Infine, la valutazione $v_i(a)$ di ogni individuo i è sua informazione privata.

Esistono in letteratura molti meccanismi possibili.

Un meccanismo diretto:

- richiede a ogni individuo i di dichiarare la sua valutazione per ogni azione
- stabilisce un sistema di pagamenti

Modello formale

Sia $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ lo spazio delle valutazioni.

Definizione

Un meccanismo diretto è una coppia di funzioni (f, p), *con* $f : V \to A$, $p : V \to \mathbb{R}^n$.

- La funzione f rappresenta la regola di decisione del meccanismo
- p determina i pagamenti di ogni individuo, in funzione dell'alternativa scelta

Raccolte le valutazioni, la società procede a scegliere un'azione a tramite f.

Struttura di gioco

Per poter fare scelte efficienti, si utilizza la struttura di gioco non cooperativo, dove i giocatori sono gli agenti:

- l'insieme V_i per l'agente i rappresenta l'insieme delle strategie di ogni giocatore
- la funzione di utilità dell'agente i, se le dichiarazioni sono $s_1, \dots, s_n$:

$$u_i(s_1, s_2, \dots, s_n) = v_i(f(s_1, s_2, \dots, s_n)) - p_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$$

Quindi l'utilità di i è rappresentata dalla sua valutazione della scelta della società in base alle dichiarazioni fatte, sottratta del pagamento che i deve sostenere.

Meccanismo veritiero

Definizione

Un meccanismo diretto si dice veritiero se per ogni individuo i dichiarare la propria vera valutazione di ogni a non è mai meno conveniente, rispetto a una qualsiasi altra dichiarazione, e qualsiasi siano le dichiarazioni degli altri individui.

Meccanismo efficiente

Definizione

Un meccanismo diretto si dice efficiente se massimizza la funzione di benessere sociale $BS(A) = \sum_{i \in I} v_i(a)$.

Esistenza

Per creare un meccanismo efficiente e veritiero, occorre trovare un ingegnoso sistema di pagamenti.

Il più famoso è il meccanismo VCG (Vickrey-Clarke-Groves):

Dato il profilo di dichiarazioni $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, i paga la differenza tra somma delle valutazioni dell'assegnazione efficiente se lui non fosse presente, sottratta della somma delle valutazioni degli altri quando lui è presente.

Questo sistema di pagamenti, oltre a rendere il meccanismo veritiero ed efficiente, ha anche il vantaggio che tutti gli individui, alla fine, hanno utilità non negativa.

Esempio 1: asta al secondo prezzo

Supponiamo che n persone partecipino a un'asta per l'assegnazione di un bene. Ogni persona ha una sua valutazione del bene: indichiamo con v_i la valutazione di i. In un'asta al secondo prezzo in busta chiusa, l'oggetto viene assegnato a chi offre di più, e chi lo riceve paga la seconda miglior offerta.

Nel contesto precedente:

- L'insieme A delle alternative coincide con l'insieme I degli individui che partecipano all'asta
- La valutazione dell'individuo i, $v_i(a)$ è nulla se $a \neq i$, v_i se $a = i$
- quindi massimizzare il benessere sociale significa scegliere l'alternativa che ha valutazione massima
- dimostrare che il meccanismo è veritiero non è difficile
- tutti i partecipanti che non ricevono il bene non pagano nulla: la loro presenza non cambia l'assegnazione del bene; mentre chi lo riceve deve pagare la seconda miglior offerta, che corrisponde alla somma delle valutazioni degli altri, se lui non ci fosse: quindi l'asta al secondo prezzo è proprio il meccanismo VCG!

Esempio 2: l'assegnazione delle camere nel campus

	App. 1	App. 2	App. 3	App 4
Alberto	50	40	40	30
Beatrice	70	0	20	10
Carla	60	70	40	30
Emanuele	20	30	60	40
Sofia	40	30	60	50

L'assegnazione efficiente è:

- Appartamento 1 a Beatrice
- Appartamento 2 a Carla
- Appartamento 3 a Emanuele
- Appartamento 4 a Sofia

Quanto deve pagare Alberto? Nulla, perché la sua presenza/assenza non cambia le assegnazioni degli appartamenti.

Quanto deve pagare Beatrice? La valutazione complessiva dell'assegnazione degli appartamenti per gli altri giocatori, lei presente, è di 70 (valutazione di Carla cui viene assegnato l'Appartamento 2) $+$ 60 $+50$ $=180$. Che cosa succederebbe se Beatrice non ci fosse? Gli assegnamenti sarebbero:

- Appartamento 1 a Alberto
- Appartamento 2 a Carla
- Appartamento 3 a Emanuele
- Appartamento 4 a Sofia

con valutazione complessiva $50+70+60+50=230$. Quindi il pagamento richiesto a Beatrice con questo sistema è di $230 - 180 = 50$. La sua presenza ha causato una perdita di 50 agli altri, e quindi paga questa perdita (di fatto, se lei non c'è, Alberto ottiene il primo appartamento, che valuta 50, per gli altri nulla cambia).

La fornitura di un bene pubblico

Il governo deve decidere se far costruire un nuovo ospedale in una città. Chiede ai suoi concittadini di dichiarare quanto valuterebbero avere a disposizione il nuovo ospedale, il cui costo c è fissato.

In questo contesto è possibile applicare il VCG (aggiungendo il governo come agente fittizio).

Il meccanismo VCG implica in questo caso:

- L'ospedale viene costruito se e solo se la somma delle valutazioni complessive dei cittadini è non minore del costo stesso
- Pagamenti: nessuno paga nulla se l'ospedale non viene costruito. Se invece si costruisce, possono succedere due cose, se lui non fosse presente:
  1. L'ospedale viene costruito lo stesso. In tal caso lui non paga nulla
  2. L'ospedale non viene costruito. In tal caso il cittadino i è cruciale per la decisione di costruire, e deve sostenere un pagamento. Il VCG implica che paghi il costo c dell'opera sottratto della somma delle valutazioni di tutti gli altri cittadini.

Di fatto, quando i cittadini sono molti e il costo dell'opera elevato, se questa viene costruita nessun cittadino è cruciale con la sua valutazione, quindi è il governo a farsi carico dei costi.

Teoria delle scelte sociali

I principali ingredienti di questa teoria sono:

1. Un insieme di alternative A
2. Un insieme N di agenti
3. Le classifiche che ogni agente ha sulle alternative di A

Lo scopo di questa teoria è di associare a ogni possibile tripla $(A, N, \succcurlyeq_i)$ o un' alternativa di A o una classifica sulle alternative di A.

Alcuni esempi

1. Elezioni
2. Classifica di certe gare individuali alle Olimpiadi
3. Un'agenda dei lavoro condominiali
4. La scelta del programma TV serale in famiglia

Una votazione

21 votanti tre candidati: A, B, e C:

Preferenze

1	1 votante	A	B	C
2	7 votanti	A	C	B
3	7 votanti	B	C	A
4	6 votanti	C	B	A

Chi viene eletto?

Il nuovo sindaco

1. Il candidato più volte votato al primo posto. Vince A con 8 voti, contro i 7 di B e i 6 di C;
2. confronti a coppie: Il vincitore è C che batte sia A sia B per 13 a 8
3. Doppio turno. I candidati A e B vanno al secondo turno, dove vince B.

Democrazia...

Funzioni di benessere sociale e di scelta sociale.

Una funzione di benessere sociale, fissato l'insieme delle alternative e degli agenti, è una legge che a ogni possibile profilo di classifiche degli stessi associa un'unica classifica.

Una funzione di scelta sociale, fissato l'insieme delle alternative e degli agenti, è una legge che a ogni possibile profilo di classifiche degli stessi associa un'unica alternativa.

Scegliere una funzione di benessere o di scelta sociale

Ci sono almeno due modi di scegliere queste funzioni:

- Proporne una che sembra ragionevole; giustificando la proposta
- Individuare un insieme di proprietà che aiutino a identificare una o una famiglia ristretta di queste funzioni

Proprietà: anonimità

La proprietà stabilisce che una funzione è anonima se il risultato finale non cambia scambiando le classifiche di due agenti qualunque.

V1	V2	V3	V4	V5
a	a	d	d	a
b	c	a	a	c
c	b	c	b	b
d	d	b	c	d

V1	V2	V3	V4	V5
d	a	d	a	a
a	c	a	b	c
b	b	c	c	b
c	d	b	d	d

Il risultato di questi due profili deve essere lo stesso.

Neutralità

La proprietà di neutralità stabilisce la stessa cosa dell'anonimità, ma dal punto di vista delle alternative.

Esempio di neutralità

Alt	V1	V2	V3	V4
a	3	1	1	3
b	1	2	4	2
c	2	3	2	1
d	4	4	3	4

Alt	V1	V2	V3	V4
a	1	2	4	2
b	3	1	1	3
c	2	3	2	1
d	4	4	3	4

Una funzione neutrale scambia nei due profili le mutue posizioni di a e b. Questo implica anche che due alternative con gli stessi voti devono essere messe alla stesso posto in classifica.

Monotonia

Una funzione di scelta sociale è monotona se, nel caso un'alternativa venga scelta come risultato di un profilo di classifiche, continuerà a essere scelta in ogni altro profilo in cui, per ogni agente, la sua classifica non peggiori.

Esempio di monotonia.

V1	V2	V3	V4	V5
a	a	d	d	c
b	c	a	a	a
c	b	c	b	d
d	d	b	c	b

V1	V2	V3	V4	V5
a	a	d	a	c
d	b	a	d	a
b	c	c	b	b
c	d	b	c	d

Se f seleziona a nel primo profilo, deve selezionarlo anche nel secondo.

Regola della maggioranza semplice

Teorema

Se le alternative sono due e i votanti in numero dispari, la regola di maggioranza semplice è l'unica funzione che soddisfa anonimità, neutralità e monotonia.

Teorema di May (1952).

Se le alternative sono più di due

Un'idea, che abbiamo già visto, è di fare confronti a coppie tra le alternative.

Per esempio $A = \{a, b, c\}$, $N = \{1, 2, 3\}$.

1	2	3
a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c	a

La cosa non funziona! Questo sistema può formare cicli.

È il Paradosso di Condorcet (1785).

Il metodo di Borda (1770)

Questo metodo, molto utilizzato, evita i problemi alla Condorcet, assegnando un punteggio alle alternative a seconda di come sono classificate dai vari agenti.

Supponiamo di avere 3 votanti e 4 alternative: a, b, c, d. Si assegnano 4 punti al primo in classifica, . . . , 1 all'ultimo.

1	2	3
a	d	d
b	c	c
c	b	b
d	a	a

1	2	3
c	d	d
b	c	c
a	b	b
d	a	a

Nel primo caso il risultato è

d	c	b	a

Nel secondo caso il risultato è:

c	d	b	a

L'elettore 1 altera il risultato finale tra c e d senza alterare la loro mutua posizione nella sua classifica.

Indipendenza dalle alternative irrilevanti

Una funzione di benessere sociale si dice indipendente dalle alternative irrilevanti se il confronto tra due alternative è indipendente da tutte le altre.

1	2	3
a	d	d
b	c	c
c	b	b
d	a	a

1	2	3
c	c	c
b	d	d
a	a	a
d	b	b

La mutua posizione delle alternative *a* e *d* deve essere la stessa nei due profili.

Unanimità

Un'altra proprietà assolutamente naturale da richiedere è quella di unanimità:

Se l'alternativa a è classificata prima di b per ogni elettore, allora lo stesso deve accadere nella classifica finale.

Dittatura

Una funzione di benessere sociale è dittatoriale se ad ogni possibile profilo di classifice associa sempre la classifica di uno degli elettori (il dittatore).

In termini matematici, la funzione è una proiezione.

Il teorema di Arrow

Teorema

Sia A un insieme contenente almeno tre alternative e sia N l'insieme degli agenti. Supponiamo che una funzione di benessere sociale soddisfi:

- *la proprietà di unanimità*
- *la proprietà di indipendenza dalle alternative irrilevanti*

Allora è dittatoriale.

Che succede con la funzione di scelta sociale?

Una funzione di scelta sociale si dice manipolabile esistono dei profili di classifiche per i quali può essere conveniente per un elettore mentire sulla sua classifica, per ottenere un risultato migliore.

Teorema

Sia A un insieme contenente almeno tre alternative. Supponiamo che una funzione di scelta sociale soddisfi

- *la proprietà di unanimità*
- *la proprietà di non manipolabilità*

Allora è dittatoriale.

Risultato ottenuto indipendentemente dal filosofo Gibbard (1973) e dall'economista Satterwhite (1975) e da allora chiamato teorema di Gibbard-Satterwhite..

Un nuovo metodo che comincia a essere usato

In questo caso gli elettori scelgono un simbolo da associare a ciascun candidato, simbolo preso da un insieme ordinato di simboli, per esempio $\{\alpha, \beta, \dots\}$ con $\alpha > \beta > \dots$.

Vediamo come si procede in un esempio.

Esempio.

L'insieme delle alternative è $A = \{a, b, c, d\}$ e l'insieme degli elettori è $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. I voti di ogni elettore sono riportati nella tabella seguente:

	1	2	3	4	5
a	α	β	γ	α	δ
b	γ	δ	β	γ	α
c	α	γ	β	α	β
d	β	α	α	γ	δ

Ora riscriviamo i voti mettendoli, per ogni alternativa, in ordine decrescente:

	I	II	III	IV	V
a	α	α	β	γ	δ
b	α	β	γ	γ	δ
c	α	α	β	β	γ
d	α	α	β	γ	δ

Procedura: passo 1

Si comincia a classificare le alternative partendo dalla terza colonna:

	I	II	III	IV	V
a	α	α	β	γ	δ
b	α	β	γ	γ	δ
c	α	α	β	β	γ
d	α	α	β	γ	δ

Le alternative a, c, d hanno lo stesso simbolo, β, mentre b ha simbolo $\gamma < \beta$. Quindi b finisce ultima in classifica, mentre per rompere i pareggi che ci sono si va al passo successivo, eliminando la colonna appena utilizzata.

	I	II	IV	V
a	α	α	γ	δ
c	α	α	β	γ
d	α	α	γ	δ

Quando le colonne soon in numero pari, diciamo $2k$, si parte dalla colonna $k+1$, nell'esempio la terza, che corrisponde alla quarta della tabella originale. Poiché $\beta > \gamma$ l'alternativa c si classifica al primo posto.

Procedura, passi successivi

La procedura viene iterata:

	I	II	V
a	α	α	δ
d	α	α	δ

Tuttavia in questo esempio la parità tra *a* e *d* non si rompe, in quanto hanno esattamente lo stesso vettore (ordinato) di valutazioni.

In conclusione la classifica finale è: c al primo posto, a,d al secondo a pari merito, ultima b.

The end

Michelangelo Merisi, Giocatori di scacchi, 1590 ca, Galleria dell'Accademia, Venezia