Nash, giochi ed equilibrio

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano

11 Ottobre 2022

La teoria dei giochi

La teoria dei giochi è la scienza delle decisioni interattive

Il gioco è utilizzato come modello di interazioni tra due o più individui

Generalizza la teoria delle decisioni, che riguarda un solo agente, che opera con dei vincoli esterni.

Un po' di storia

1. Nel 1913 E. Zermelo pubblica un lavoro che parla degli scacchi
2. Negli anni 20 Borel introduce l'idea di strategia mista
3. Nel 1928 von Neumann dimostra un teorema fondamentale sui giochi finiti a somma zero
4. Nel 1944 von Neumann e Morgerstern pubblicano il libro *Theory of Games and Economic Behaviour*
5. Nel 1951 Nash introduce il modello di gioco non coooperativo, di idea di equilibrio, e dimostra un teorema di esistenza degli equilibri
6. Nel 1994, 2005, 2007, 2012, 2020 I premi Nobel per l'Economia sono assegnati a esperti di teoria dei giochi.

Le ipotesi di base

Gli agenti (i giocatori) sono:

- egoisti
- razionali

Egoismo: ogni agente cerca di ottenere il meglio per sé

Razionalità: la parte complicata di tutta la teoria...

Concettualmente, la teoria delle decisioni si basa su un'ipotesi ovvia: il decisore sceglie un'azione che, tra tutte quelle possibili, massimizza la sua soddisfazione.

Quindi un problema di decisione, che può essere complicatissimo in pratica, è comunque banale da definire.

In ambito interattivo invece, l'idea di comportamento razionale di un giocatore è difficile da definire, dal momento che il suo risultato finale dipende dalle scelte di tutti, non solo dalle sue.

Scopo della teoria dei giochi

La teoria dei giochi ha lo scopo di definire rigorosamente che cosa significhi *comportamento razionale*

Occorre quindi ricordare sempre che le sue applicazioni riguardano un agente ideale.

The beauty contest

Nel Capitolo 12 del suo libro Teoria generale dell'occupazione, interessi e della moneta, l'economista J,M. Keynes immagina un concorso di bellezza fittizio, in cui giornali propongono ai lettori di scegliere i volti più belli tra un centinaio di foto, promettendo un premio a coloro che votano quello che risulta il più popolare. E scrive:

Non è quindi il caso di scegliere quei [volti] che, secondo la propria opinione, siano veramente i più belli, nemmeno quelli che l'opinione media pensa che siano i più belli. Abbiamo raggiunto il terzo grado dove impieghiamo la nostra intelligenza per anticipare quella che è l'opinione media rispetto a quale dovrebbe essere l'opinione media. E ci sono alcuni, credo, che praticano il quarto, il quinto ed ulteriori passi

It is not a case of choosing those [faces] that, to the best of one's judgment, are really the prettiest, nor even those that average opinion genuinely thinks the prettiest. We have reached the third degree where we devote our intelligences to anticipating what average opinion expects the average opinion to be. And there are some, I believe, who practice the fourth, fifth and higher degrees

Il gioco

A un certo numero di persone viene chiesto di selezionare simultaneamente un numero compreso tra 0 e 100. Il vincitore del concorso è la persona che dice il numero più vicino a p volte la media di tutti numeri scelti dai partecipanti (con $0 < p < 1$).

Che risposta suggerisce la teoria dei giochi? Quale risposta ha più probabilità di essere vincente?

La risposta corretta è 0, ma se qualcuno la scrive ha probabilità molto bassa di essere il vincitore. . .

Un primo concetto di razionalità

Un giocatore non sceglie un'alternativa se ne ha un'altra che gli permette di ottenere di più, *qualunque siano le scelte degli altri giocatori*

Principio dell'eliminazione delle scelte strettamente dominate

Inevitabile, se si vuole estendere la teoria delle decisioni.

Un esempio sorprendente

Supponiamo i giocatori possano scegliere quale dei due giochi di sotto giocare

	S	D
A	(10,10)	(3,15)
B	(15,3)	(5,5)

.

	S	D
A	(8,8)	(2,7)
B	(7,2)	(0,0)

Per ogni coppia di scelte congiunte (A,S), (A,D), (B,S),(B,D) i giocatori ottengono di più nel primo gioco che nel secondo.

Tuttavia è più conveniente per entrambi giocare il secondo, perché ottengono entrambi 8, mentre nel primo solo 5. Questo mostra che non vale una proprietà di base della teoria delle decisioni ($f \geq g \Rightarrow \max f \geq \max g$).

Un secondo esempio sorprendente

Gioco di base

	S	D
A	(10,10)	(3,5)
B	(5,3)	(1,1)

	S	D	N
A	(10,10)	(3,5)	(-1,6)
B	(5,3)	(1,1)	(-1,6)
N	(11,-1)	(4,-1)	(0,0)

Nel primo entrambi ottengono 10, nel secondo 0.

Aggiungere scelte possibili ai giocatori può essere dannoso per loro, il che contraddice un'altra proprietà basilare della teoria delle decisioni ($A \subset B \Rightarrow \max_A f \leq \max_B f$).

Von Neumann

von Neumann ha studiato i giochi di due giocatori con preferenze opposte. Come modello, si considera $(X, Y, f : X \times Y \to \mathbb{R})$ dove X (Y) è lo spazio delle scelte del primo, (del secondo) e f rappresenta quanto il secondo paga al primo. Afferma quindi che, se esiste un valore reale v tale che

1. il primo giocatore ha una scelta $\bar{x}$ tale che $f(\bar{x}, y) \geq v$ per ogni $y \in Y$
2. il secondo ha una scelta $\bar{y}$ tale che $f(x, \bar{y}) \leq v$ per ogni $x \in X$

allora una scelta ottimale per i giocatori è $\bar{x}$, $\bar{y}$ rispettivamente, e il secondo giocatore paga v al primo.

Un esempio

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 8 \\ 8 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Il secondo paga 5 al primo giocatore

Oltre la somma zero

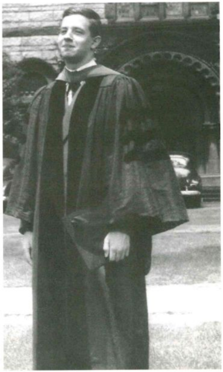
Questo approccio non ha senso in giochi non strettamente competitivi, e se i giocatori sono più di due

Per questo von Neumann introduce la teoria *cooperativa* nella quali gli agenti formano coalizioni, allo scopo di ottenere vantaggi *individuali*.

Arriva Nash

Nel 1950 J.F. Nash Jr propone un approccio diverso al caso generale, quello che oggi è conosciuto come modello non cooperativo di Nash

Ma chi è Nash?



Nash studente a Princeton

La vita di Nash in poche date

- Nasce a Bluefield (Virginia) nel Giugno del 1928
- Si laurea in Matematica nel 1948 a Pittsburgh (Carnegie Mellon)
- Studente a Princeton, dove consegue un Ph.D. nel 1951
- Ha un figlio nel 1953, mentre lavora alla RAND Corporation
- Viene licenziato nel 1954, anche a seguito di un'accusa di omosessualità
- Lavora al M.I.T. di Boston, tra i suoi allievi c'è Alicia Lardé, che sposa nel 1957
- Tra il 1951 e il 1958 pubblica i suoi risultati matematici fondamentali
- Nel 1959 Alicia e John hanno un figlio. John comincia a dare segni di squilibrio mentale
- Gli viene riconosciuta una forma di schizofrenia paranoide
- Divorzia dalla moglie nel 1962
- Ritorna a vivere con la moglie nel 1970

La vita in poche date

- Nei primi anni 90 a Princeton ritorna gradualmente a una vita *normale*
- Riceve il premio Nobel nel 1994, con Harsanyi e Selten
- Nel 1998 esce il libro *A beautiful mind*, di Sylvia Nasar
- Nel 2001 esce il film *A beautiful mind*, con Russell Crowe
- Nel 2001 si risposa con Alicia
- Riceve la laurea H.C. in Economia dalla Università Federico II di Napoli, nel 2003
- Passa più di 10 anni accettando inviti in giro per il mondo
- Riceve il prestigioso premio Abel il 19 Maggio 2015, assieme a Niremberg

Il 23 Maggio 2015, di ritorno da Oslo, dove si erano recati in occasione del conferimento del premio Abel, Nash e sua moglie muoiono in un incidente stradale.

Il modello di Nash

Nella sua tesi di dottorato, Nash propone un modello alternativo a quello di von Neumann, il modello di *Gioco non cooperativo a n giocatori, in forma strategica*

Formalmente, il gioco è definito da

$$(N, X_1, \ldots, X_n, f_1, \ldots f_n : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R})$$

dove N è un insieme di n elementi, i giocatori, X_i è l'insieme delle strategie del giocatore i e f_i la sua funzione di utilità.

Esito razionale del gioco

Occorre ora definire quali sono le strategie che giocatori razionali giocano in un gioco, come definito sopra. Nash propone la sua idea di equilibrio, che gli ha sfruttato poi il Nobel 40 anni dopo. Dato il gioco $(X, Y; f, g : X \times Y \to \mathbb{R})$

il profilo di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ è un equilibrio se

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \qquad \forall x \in X$$

$$g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \qquad \forall y \in Y$$

Un profilo di strategie è un equilibrio di Nash se nessun giocatore ha interesse a deviare **unilateralmente** dal profilo stesso.

Al lago o al mare?

	M	L
M	(10,5)	(1,0)
L	(0,1)	(5,10)

.

I profili di equilibrio sono (M,M) e (L,L).

Localizzazione delle risorse

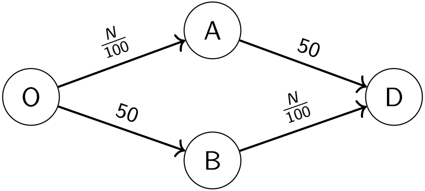
In una spiaggia lunga 1 km (descritta dal segmento $[0, 1]$) e affollata in modo uniforme dai bagnanti, alcuni gelatai devono decidere in quale punto aprire i loro chioschi. I gelatai vendono tutti lo stesso tipo di gelato e i bagnanti si recano al chiosco più vicino. Ogni gelataio cerca di avere più clienti possibili.

Ecco gli equilibri di Nash in alcuni casi:

- Se i venditori sono 2, l'unico equilibrio consiste nel mettersi entrambi nel mezzo
- Se i venditori sono 4: 2 in posizione $\frac{1}{4}$, 2 in posizione $\frac{3}{4}$
- se i venditori sono 5: 2 in in posizione $\frac{1}{6}$, 2 in posizione $\frac{5}{6}$, 1 in posizione $\frac{1}{2}$
- Se i venditori sono 6 o più, esistono infinite configurazioni di equilibrio
- se i venditori sono 3 non esiste nessuna situazione di equilibrio.

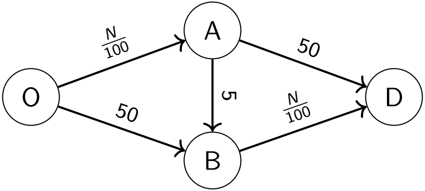
Un problema di traffico

4000 persone debbano recarsi da O, a D. I percorsi e i tempi di percorrenza in figura. Quali sono gli equilibri in questa situazione?



Il tempo di percorrenza per tutti è di 70 minuti

Aggiungendo una nuova strada



Ora il tempo di percorrenza per tutti diventa di 85 minuti

Duopolio

Due imprese producono le quantità $q_1, q_2 \geq 0$ dello stesso bene divisibile. Per produrlo, sostengono costi unitari c_1, c_2; una certa quantità a di prodotto saturi il mercato. Come si definisce il prezzo unitario del bene? La quantità totale di prodotto immessa sul mercato influenza il prezzo e le utilità dei produttori sono definite come quanto ricavato meno quanto speso per produrre. Si può quindi assumere:

- il prezzo di vendita del prodotto è definito come $p = a - (q_1 + q_2)$
- il comune spazio di strategie dei produttori è $X_1 = X_2 = [0, a]$
- le funzioni di utilità sono

$$u_1(q_1, q_2) = q_1 p(q_1, q_2) - c_1 q_1 = q_1(a - (q_1 + q_2)) - c_1 q_1$$

$$u_2(q_1, q_2) = q_2 p(q_1, q_2) - c_2 q_2 = q_2(a - (q_1 + q_2)) - c_2 q_2$$

Confrontando diverse situazioni

È interessante confrontare l'equilibrio di Nash nella situazione di oligopolio simmetrico, con quella di monopolio e quella in cui un'azienda leader annuncia le sue scelte e l'altra si adegua. I risultati sono

	p	q_1	q_2	u_1	u_2
monopolio	$\frac{a+c}{2}$	$\frac{a-c}{2}$	0	$\frac{(a-c)^2}{4}$	0
duopolio	$\frac{a+2c}{3}$	$\frac{a-c}{3}$	$\frac{a-c}{3}$	$\frac{(a-c)^2}{9}$	$\frac{(a-c)^2}{9}$
leader	$p = \frac{a+3c}{4}$	$\frac{a-c}{2}$	$\frac{a-c}{4}$	$\frac{(a-c)^2}{8}$	$\frac{(a-c)^2}{16}$

Ultimatum game

Un padre ha comprato una torta per i suoi due figli, e dice a uno dei due: “offri una frazione qualunque della torta a tuo fratello; se lui accetta la divido secondo il vostro accordo, se invece rifiuta la torta me la mangio io”.

Che faranno i figli?

Le strategie dei figli:

- Per il primo: $x \in [0, 1]$
- Per il secondo: una risposta, o sì o no, *per ogni possibile x dichiarato dal primo*

Quali sono gli esiti di equilibrio di questo gioco?

Gioco che solleva molte questioni interessanti

Equilibri nell'ultimatum game

Per giocatori razionali, l'unico esito possibile è che il primo offre $x = 0$ al secondo, il quale accetta tutte le offerte (a questi giochi si applica un principio, chiamato induzione a ritroso)

Non è l'unico equilibrio di Nash. Ogni configurazione $(1 - x, x)$ $0 \leq x \leq 1$ proviene da un equilibrio di Nash (in effetti da molti equilibri di Nash...)

Come può essere credibile che il primo offra al secondo il 99% della torta e se ne tenga solo l'1%?

Che cosa accade negli esperimenti?

Il dilemma del viaggiatore

Una compagnia aerea perde due valigie contenenti oggetti di identico valore e di due passeggeri differenti. Il rimborso massimo ammonta a 1000 Euro. Entrambi i passeggeri devono comunicare il valore degli oggetti, in un intervallo compreso tra i 20 e i 1000 Euro; se entrambi scrivono lo stesso valore la compagnia rimoborserà quel valore; in caso di dichiarazioni diverse, il valore che la compagnia assegna alle due valige è quello minore, e riconosce inoltre un premio di 20 Euro a chi dichiara la cifra minore, mentre applica una deduzione di 20 Euro a chi dichiara la maggiore.

L'unico profilo di equilibrio si ha con la dichiarazione di 20 Euro.

Il gioco del bene pubblico

Una città con n abitanti, ciascuna dei quali sceglie $x \geq 0$ da mettere in cassa comune. La somma $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ottenuta viene moltiplicata per un fattore m $(1 < m < n)$, e ridistribuita in maniera egualitaria tra tutti i giocatori.

L'unico equilibrio di Nash prevede che tutti gli abitanti scelgono $x = 0$.

Dimostrazione

Supponiamo $(x_1, \ldots, x_n)$ sia un profilo dato, e supponiamo $x_i > 0$. L'utilità del giocatore i è

$$\frac{m(\sum_{j \neq i} x_j + x_i)}{n} - x_i.$$

Nel caso invece scelga di non pagare nulla, otterrebbe

$$\frac{m(\sum_{j \neq i} x_j)}{n}.$$

La differenza tra l'utilità nel primo e nel secondo caso è

$$(\frac{m}{n} - 1)x_i < 0.$$

$(0, \ldots, 0)$ è l'unico profilo di equilibrio.

Il dilemma del prigioniero

Due malviventi, sospettati di una rapina e altre colpe minori, vengono portati davanti ad un giudice, che dice loro:

Se confessate entrambi, sarete condannati a 5 anni di galera per rapina; se invece non confessate sarete condannati a un anno per gli altri reati; infine, se uno confessa e l'altro no, chi confessa ottiene benefici di legge ed è libero, chi non confessa avrà un aggravante e farà 6 anni di prigione.

Una problematica simile venne originariamente portata all'attenzione degli esperti nel 1950 da Merrill Flood and Melvin Dresher che lavoravano alla RAND corporation, un think tank di studi strategici. In seguito A. W. Tucker ha inventato la storiella di sopra, nonché il nome di dilemma del prigioniero, per renderla più attraente per una platea di psicologi durante un convegno all'Università di Stanford.

Esiste un unico equilibrio di Nash, in cui i giocatori usano la loro strategia strettamente dominante, quella di confessare.

Paul Watzlawick

Il filosofo e psicologo P. Watzlawick nel suo libro *La pragmatica della comunicazione umana*, parlando del dilemma del prigioniero, afferma:

Il risultato non è affatto teorico. Forse si tratta della più elegante rappresentazione astratta di un problema che abbiamo ripetutamente incontrato nella psicoterapia del matrimonio...

Hobbes

Nel 1651 Thomas Hobbes ha pubblicato il libro *Leviathan or the matter, forme and power of a commonwealth ecclesiasticall and civil*, (o *Leviathan*). In esso afferma che

gruppi di uomini, lasciati a seguire i loro istinti, purché di tanto in tanto poco interessati alla collaborazione, cadono nella trappola della guerra di tutti contro tutti, e in queste condizioni, la vita umana diventa *solitary, poor, nasty, brutish and short*.

Il dilemma del prigioniero, sintetizzato dalla tabella seguente, è una sintesi meravigliosa di quanto dice Hobbes:

	C	NC
C	(5,5)	(0,6)
NC	(6,0)	(1,1)

.

Ma nella vita reale succede davvero così?

Numerosi esperimenti mostrano che in realtà le persone, in una situazione tipo dilemma del prigioniero, spesso collaborano.

Come si spiega questa cosa?

- Le ipotesi della teoria non funzionano, forse gli agenti non sono sempre egoisti
- l'idea di equilibrio non è quella giusta (. . .)
- le funzioni di utilità sono scelte correttamente?
- Che ne dice Nash?

Gioco ripetuto

Nash aveva osservato che probabilmente coloro che sono coinvolti in questi esperimenti pensano di giocare un *gioco ripetuto* e che questo cambia le carte in tavola

Famosi teoremi successivi, chiamati Folk theorems, hanno mostrato che, sotto certe condizioni, è una situazione di equilibrio anche quella di collaborare (non confessare nel dilemma del prigioniero).

Uno dei più belli si può sintetizzare così:

Se i giocatori sono sufficientemente pazienti, se hanno sufficiente fiducia nel futuro, allora collaborare sempre è l'esito di un equilibrio di Nash.

Tutto risolto?

Il Folk theorem allora risolve tutto?

Ovviamente no, per questo è un bel teorema!

A Pompei