Strong Nash Equilibria in Bimatrix Games

Eleonora Braggion

Relatori: Prof. Roberto Lucchetti
Prof. Nicola Gatti

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN INGEGNERIA MATEMATICA
Politecnico di Milano

Milano, 29 Aprile 2014

Gioco in forma strategica

Tripla (N, A, U):

- $N = \{1, \ldots, n\}$ è l'insieme dei giocatori,
- $A = \{A_1, \ldots, A_n\}$ è l'insieme delle azioni dei giocatori, $\sharp A_i = m_i$
- $U = \{U_1, \ldots, U_n\}$ è l'insieme delle multi-matrici di utilità dei giocatori.

Profilo di strategie: $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$.
$x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{im_i})$

Utilità del giocatore $i-$esimo:

$$v_i(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_n} U_i(i_1, \ldots, i_n) \cdot x_{1i_1} \cdots x_{ni_n} = x_i^\top U_i \prod_{j \neq i} x_j$$

Equilibrio di Nash

Definizione

Il profilo di strategie $\overline{x}$ si dice equilibrio di Nash se, per ogni $i \in N$, $v_i(\overline{x}) \geq v_i(x_i, \overline{x}_{-i})\ \forall x_i$.

Principio d'Indifferenza (PI): all'equilibrio ogni azione giocata con probabilità positiva da un giocatore deve garantire la stessa utilità (non inferiore all'utilità garantita dalle altre azioni).

$$\tilde{U}_i \prod_{j \neq i} x_j = v_i^* \cdot \underline{1} \quad \forall i \in N$$

$$\overline{U}_i \prod_{j \neq i} x_j \leq v_i^* \cdot \underline{1} \quad \forall i \in N$$

Pareto efficienza

Sia data $f : K \subset \mathrm{R}^k \to \mathrm{R}^m$

Definizione

$\overline{x} \in K$ si dice Pareto efficiente se non esiste $x \in K$:

$$f_j(x) \geq f_j(\overline{x}) \; \forall j = 1, ..., m$$

$$f_j(x) > f_j(\overline{x}) \text{ per almeno un } j \in \{1, ..., k\}$$

Condizioni (vettoriali) di Karush-Kuhn-Tucker (KKT)

$$\begin{aligned}
-\lambda_1 U_1 x_2 - \lambda_2 U_2 x_2 + \mu_1 \cdot \underline{1} &= 0 \\
-\lambda_1 U_1^\top x_1 - \lambda_2 U_2^\top x_1 + \mu_2 \cdot \underline{1} &= 0 \\
\lambda &\geq 0 \\
\lambda &\neq 0
\end{aligned}$$

Strong Nash Equilibrium

Definizione

Strong Nash Equilibrium: un profilo di strategie $\overline{x}$ stabile rispetto ad ogni possibile deviazione di qualsiasi sottocoalizione di giocatori.

È contemporaneamente un NE e Pareto efficiente per ogni sottocoalizione di giocatori.

Tutti i giochi possiedono almeno un NE (teorema di esistenza di Nash) e outcome Pareto efficienti.

Non tutti i giochi possiedono SNE.

Obiettivo della tesi

Sia G lo spazio dei giochi in forma strategica con numero di giocatori e numero di azioni per ogni giocatore fissati.

Obiettivo della tesi: studiare quanti problemi in G possiedono uno SNE.

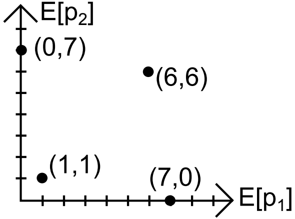
Useremo IP e KKT (per ogni sottocoalizione) come condizioni che individuano potenziali SNE.

Giochi a 2 giocatori

Genericità degli SNE

Problema: Nello spazio dei giochi l'insieme di quelli che possiedono almeno uno SNE è *piccolo*?

		prisoner 2	
		confess	not confess
prisoner 1	confess	(6,6)	(7,0)
	not confess	(0,7)	(1,1)



Strategie miste

Nell'esempio precedente lo SNE è in strategie pure.

Che succede nel caso di strategie miste?

Primo risultato:

L'insieme dei giochi che ammettono SNE in miste ha misura nulla.

SNE fully mixed: misura nulla

KKT:

$$-\lambda_1 U_1 x_2 - \lambda_2 U_2 x_2 + \mu_1 \cdot \underline{1} = 0$$
$$-\lambda_1 U_1^\top x_1 - \lambda_2 U_2^\top x_1 + \mu_2 \cdot \underline{1} = 0$$

IP:

$$U_1 x_2 = v_1^* \cdot \underline{1}$$
$$U_2^\top x_1 = v_2^* \cdot \underline{1}$$

Almeno uno tra λ_1 e λ_2 è $\neq 0$. Supponiamo $\lambda_1 \neq 0$ e otteniamo:

$$U_2 x_2 = v_2^* \cdot \underline{1} \tag{1}$$

IP + condizione aggiuntiva $\Rightarrow$ Sistema lineare sovravincolato

$\Rightarrow$ **MISURA NULLA**

Il ragionamento vale, riadattato, anche per SNE non fully mixed.

Allineamento con coefficiente non positivo

Nel caso $\lambda_1 \neq 0$ otteniamo le seguenti condizioni:

$$U_1 x_2 = v_1^* \cdot \underline{1} \tag{2}$$
$$U_2^\top x_1 = v_2^* \cdot \underline{1} \tag{3}$$
$$U_2 x_2 = v_2^* \cdot \underline{1} \tag{4}$$

Da queste ricaviamo:

- allineamento degli outcomes su una stessa riga,
- allineamento degli outcomes su una stessa colonna,
- allineamento di tutti gli outcomes su una retta di coefficiente non positivo.

Interpretazione

Esistenza di SNE a supporto pieno

$\Updownarrow$

Tutti gli outcomes sono allineati

$\Updownarrow$

Gioco strettamente competitivo
in cui **ogni** outcome è Pareto efficiente

Allineamento: condizione necessaria ma non sufficiente

player 2

player 1

	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
a_{11}	(2,0)	(0,2)	(-5,-5)	(-5,-5)
a_{12}	(0,2)	(2,0)	(-5,-5)	(-5,-5)
a_{13}	(-5,-5)	(-5,-5)	(5,0)	(0,0)
a_{14}	(-5,-5)	(-5,-5)	(0,0)	(0,5)

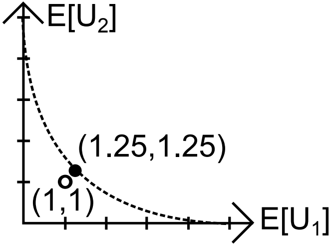


Figura : Matrice di utilità e valori x e y sul piano delle utilità attese

Il NE $x = ([0.5, 0.5, 0, 0], [0.5, 0.5, 0, 0])$ soddisfa le KKT e la condizione di allineamento ma è dominato dal vettore $y = ([0, 0, 0.5, 0.5], [0, 0, 0.5, 0.5])$.

$=>$ NON È UNO SNE

Allineamento: condizione necessaria ma non sufficiente

player 2

player 1		a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
	a_{11}	(2,0)	(0,2)	(-5,-5)	(-5,-5)
	a_{12}	(0,2)	(2,0)	(-5,-5)	(-5,-5)
	a_{13}	(-5,-5)	(-5,-5)	(5,0)	(0,0)
	a_{14}	(-5,-5)	(-5,-5)	(0,0)	(0,5)

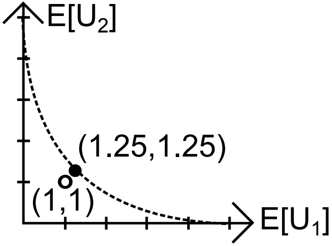


Figura : Matrice di utilità e valori x e y sul piano delle utilità attese

Il NE $x = ([0.5, 0.5, 0, 0], [0.5, 0.5, 0, 0])$ soddisfa le KKT e la condizione di allineamento ma è dominato dal vettore $y = ([0, 0, 0.5, 0.5], [0, 0, 0.5, 0.5])$.

=> NON È UNO SNE

Cosa succede per n$\geq$ 3?

Appartenenza ad iperpiano non necessaria

player 1 (rows), player 2 (columns), player 3: a_{31}

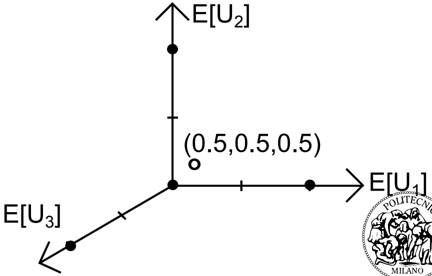
	a_{21}	a_{22}
a_{11}	2,0,0	0,2,0
a_{12}	0,0,2	0,0,0

player 3: a_{32}

	a_{21}	a_{22}
a_{11}	0,0,0	0,0,2
a_{12}	0,2,0	2,0,0

Figura : Matrici di utilità di un gioco $2 \times 2 \times 2$

$x = ([0.5, 0.5], [0.5, 0.5], [0.5, 0.5])$ è uno SNE ma gli outcomes non giacciono sullo stesso piano



Appartenenza ad iperpiano non necessaria

Cerchiamo un profilo di strategie che domini quello dato:

$$2x_{11}x_{21}x_{31} + 2x_{12}x_{22}x_{32} > 0.5$$
$$2x_{11}x_{22}x_{31} + 2x_{12}x_{21}x_{32} > 0.5$$
$$2x_{11}x_{22}x_{32} + 2x_{12}x_{21}x_{31} > 0.5$$

Sostituendo ad ogni x_{i2} il valore $1 - x_{i1}$, otteniamo il seguente sistema:

$$2 - 2x_{21} - 2x_{31} - 2x_{11} + 2x_{21}x_{31} + 2x_{11}x_{21} + 2x_{11}x_{31} > 0.5$$
$$2x_{21} + 2x_{11}x_{31} - 2x_{11}x_{21} - 2x_{21}x_{31} > 0.5$$
$$2x_{11} - 2x_{11}x_{21} - 2x_{11}x_{31} + 2x_{21}x_{31} > 0.5$$

che è inammissibile!

SNE in miste ha misura nulla?

Applicando IP e KKT otteniamo un maxisistema di equazioni che non è lineare.
Supponendo $m_3 \geq m_1$ e $m_3 \geq m_2$ consideriamo il sottosistema:

$$\begin{aligned} U_1 x_1 x_2 &= v_1^* \cdot \underline{1} \\ U_2 x_1 x_2 &= v_2^* \cdot \underline{1} \\ U_3 x_1 x_2 &= v_3^* \cdot \underline{1} \end{aligned}$$

Dimostriamo che l'insieme di matrici U_1, U_2, U_3 tali per cui il sistema può essere soddisfatto da due vettori x_1, x_2 ha misura nulla.

Insiemi algebrici e semialgebrici

Definizione

$A \subset \mathrm{R}^k$ si dice algebrico se si può descrivere tramite un numero finito di equazioni polinomiali.

Definizione

$A \subset \mathrm{R}^k$ si dice semialgebrico se si può descrivere tramite un numero finito di equazioni e disequazioni polinomiali.

Mappe algebriche e semialgebriche

Sia $F : K \subset \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$ una mappa a valori insiemi.

Definizione

F si dice algebrica (semialgebrica) se il suo grafico è algebrico (semialgebrico).

Due risultati fondamentali:

1. La proiezione di un insieme algebrico è semialgebrica.
2. Se F è semialgebrica e $\dim F(x) \leq l \, \forall x$ allora $\dim F(K) \leq l + n$.

Consideriamo il sottosistema:

$$U_1 x_1 x_2 = v_1^* \cdot \underline{1}$$
$$U_2 x_1 x_2 = v_2^* \cdot \underline{1}$$
$$U_3 x_1 x_2 = v_3^* \cdot \underline{1}$$

$A = [U_1, U_2, U_3]^\top$, $b = [v_1^* \cdot \underline{1}, v_2^* \cdot \underline{1}, v_3^* \cdot \underline{1}]^\top$.

Consideriamo $F : \Delta^{m_1} \times \Delta^{m_2} \rightrightarrows (\mathbf{M}^{m_1 \times m_2})^{3m_3}$, definita da

$$F(x_1, x_2) = \{(A_1, A_2, \ldots, A_{3m_3}) : x_1^\top A_i x_2 = b_i \ \forall i$$

F è semialgebrica e la dimensione di $F(x_1, x_2)$ è $3m_3 \cdot (m_1 m_2 - 1)$.
Confrontando le dimensioni di $F(\Delta^{m_1} \times \Delta^{m_2})$ e dello spazio di arrivo:

$$3m_3 \cdot (m_1 m_2 - 1) + (m_1 + m_2 - 2) < 3m_1 m_2 m_3$$

MISURA NULLA!

Risultati

2 giocatori

1.1 (Esistenza) SNE in strategie pure esiste per misura non nulla,

1.2 (Esistenza) SNE in strategie miste esiste per misura nulla,

1.3 (Caratterizzazione) Allineamento outcomes su retta a coefficiente non positivo: gioco strettamente competitivo.

n giocatori

2.1 (Esistenza) SNE in strategie miste esiste per misura nulla,

2.2 Non vale l'estensione naturale del risultato ottenuto in 1.3.

Implicazioni

- Nella pratica i giochi ammettono equilibri SNE solo in strategie pure
- Quindi è possibile trovare SNEs in tempo polinomiale rispetto alla dimensione del gioco, ma esponenziale rispetto al numero di giocatori
- Trovare un SNE è quindi computazionalmente più facile rispetto a trovare un NE

Sviluppi futuri

- Caratterizzare i giochi che ammettono SNE puri,
- Creare un algoritmo di ricerca per gli SNE misti che ricerca se esiste un allineamento,
- Caratterizzare geometricamente l'esistenza di uno SNE in miste in un gioco con più di 2 giocatori.

Bibliografia

R. J Aumann et al. Acceptable points in games of perfect information. *Pacific Journal of Mathematics*, 1960.
C. Daskalakis, P.W. Goldberg, C.H. Papadimitriu. The complexity of computing a nash equilibrium. *SIAM Journal on Computing*, 2006.
N. Gatti, T. Sandholm. Finding the Pareto curve in bimatrix games is easy. In *International joint conference on autonomous agents and multi-agent system (AAMAS)*, 2014.
M. Hoefer, A. Skopalik. On the complexity of Pareto-optimal Nash and Strong equilibria. In *Algorithmic Game Theory*, 2010.
M. Maschler, E. Solan, S. Zamir. Game Theory. *Cambridge University Press*, 2013. K. Miettinen. Nonlinear multiobjective optimization. *Springer*, 1999.
R. Nessah, G. Tian. On the existence of Strong Nash equilibria. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2014.
N. Nisan. Algorithmic game theory. *Cambridge University Press*, 2007.

Grazie per l'attenzione!