

Giochi strategici: matematica tra psicologia, filosofia, e applicazioni concrete

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano

Genova, Palazzo Ducale, 10 Marzo 2014

Che cosa è la teoria dei giochi?

Nel libro

Pragmatica della Comunicazione Umana

Paul Watzlawick, Janet Helmick Beavin e Don D. Jackson

introducono gli **assiomi** di base della **comunicazione umana**.

Il primo recita:

È impossibile evitare la comunicazione

Un'unità di comunicazione è un **messaggio**, una serie di messaggi costituisce un'**interazione**.

La teoria dei giochi è la **matematica dell'interazione**.

Definizione di Gioco

Un gioco può essere descritto come una situazione in cui:

- 1) ci sono dei **giocatori**, in genere almeno due;
- 2) c'è una ben definita **situazione iniziale**;
- 3) esistono **regole** di comportamento per i giocatori;
- 4) il processo termina con un certo numero di **situazioni finali**;
- 5) i giocatori hanno delle **preferenze** sulle situazioni finali.

Gli assiomi della teoria

Le ipotesi di base:

I giocatori sono:

- 1) egoisti;
- 2) razionali.

Egoismo

I giocatori si occupano **esclusivamente** delle loro preferenze personali.

*Quelle degli altri sono prese in considerazione **solo** per cercare di fare scelte che massimizzino la **soddisfazione personale**.*

Razionalità

Differenti livelli di razionalità.

Ipotesi di base:

Il giocatore è in grado di esprimere **preferenze coerenti** sulle situazioni finali del gioco.

Matematicamente:

Il giocatore sa definire una relazione **completa**, riflessiva, **transitiva** sulle situazioni finali del gioco.

Ma anche:

quando necessario sa fornire una **funzione di utilità** relativa al suo sistema di preferenze.

Livelli più sofisticati di razionalità

I giocatori sono in grado di:

- 1) fare un'analisi **di ogni ordine** sulle conseguenze delle azioni proprie e di tutti gli altri;
- 2) usare le **leggi della probabilità** se il gioco prevede eventi aleatori;
- 3) usare la **teoria delle decisioni**.

Analisi di ogni ordine sulle conseguenze delle azioni proprie e di tutti gli altri

Celebre esempio:

- 1) Scrivete un numero compreso tra 1 e 100;
- 2) io calcolo la media dei numeri scritti da voi;
- 3) coloro che scrivono il numero più vicino al 50% della media calcolata da me si dividono un interessante premio in denaro.

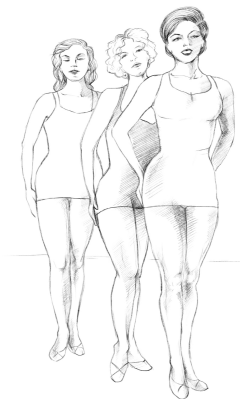
Il concorso di bellezza

Esempio che esprime in forma matematica una celebre sentenza di J. Keynes (General theory of Employment, Interest and Money. Cambridge University Press, 1936)

It is not a case of choosing those [faces] which, to the best of one's judgement, are really the prettiest, nor even those which average opinion genuinely thinks the prettiest. We have reached the third degree where we devote our intelligencies to anticipating what average opinion expects the average opinion to be. And there are some, I believe, who practice the fourth, fifth and higher degrees.

The beauty contest in *Scacchi e scimpanzé*^a

^aR.Lucchetti, Bruno Mondadori Editore, 2012



Questioni di probabilità

Un esempio (senza eventi probabilistici)

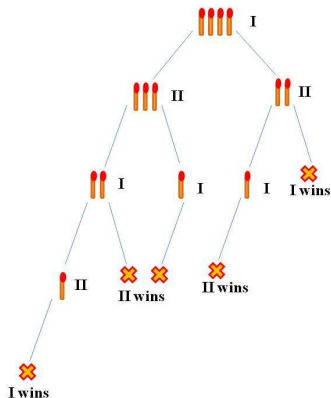


Figura: Si possono togliere uno o due fiammiferi dalla tavola, chi toglie l'ultimo perde

Questioni di probabilità

Un secondo esempio (con eventi probabilistici)

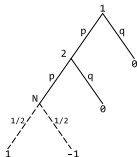


Figura: C'è una carta sul tavolo. Il primo decide se passare (q := $quit$), o giocare (p := $play$). Se gioca passa al secondo, che deve decidere se passare o giocare. Se entrambi giocano, mettono una moneta sul tavolo. Se la carta è rossa, il primo si prende le due monete, altrimenti se le prende il secondo.

Che cosa decidono di fare due giocatori razionali?

Ogni scelta osservata può essere accettabile.

La scelta fatta dipende in maniera cruciale dalla scelta della funzione di utilità utilizzata:

non basta avere delle preferenze sugli esiti del gioco

Le scelte delle utilità devono essere coerenti

Lotterie

Nel primo negozio:

Alternativa A:

premio	probabilità
2500	33%
2400	66%
0	1%

Alternativa B:

guadagno	probabilità
2500	0%
2400	100%
0	0%

Coerenza

Nel secondo negozio:

Alternativa *C*:

guadagno	probabilità
2500	33%
0	67%

Alternativa *D*:

guadagno	probabilità
2400	34%
0	66%

L'esperimento di Allais^a

^aPremio Nobel per l'Economia, 1988

Le alternative A e C coincidono, e le alternative B e D anche

$$0.33u(2500) + 0.66u(2400)$$

e

$$u(2400)$$

Tuttavia tra 72 persone, nel primo negozio l'**82%** delle persone hanno giocato la lotteria B , nel secondo, l'**83%** delle persone ha scelto la lotteria C .

Uso della teoria delle decisioni

Ipotesi di base della teoria delle decisioni: il decisore **non** prende una decisione z se ne ha disponibile un'altra, x , tale che l'esito ottenuto con x sia migliore per lui dell'esito ottenuto con z .

Il decisore **massimizza** la sua funzione utilità.

Una prima conseguenza

Ovvia estensione dell'assioma precedente nella teoria interattiva:

Il decisore **non** prende una decisione z se ne ha disponibile un'altra, x , tale che l'esito finale ottenuto con x è meglio per lei dell'esito ottenuto con z , **per ogni possibile combinazione delle scelte degli altri giocatori**.

Matematicamente, z non viene scelta se esiste x tale che

$$f(x, y) > f(z, y) \quad \forall y^1$$

¹ f funzione utilità del giocatore; y rappresenta ogni possibile combinazione delle azioni degli altri giocatori.

Un esempio: il millepiedi

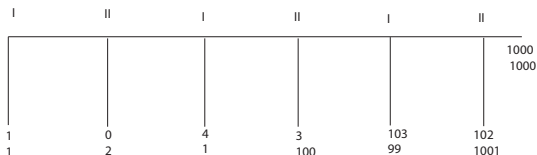


Figura: I giocatori, ciascuno al suo turno, decidono se scendere (terminare il gioco), o andare avanti; se entrambi vanno avanti, alla fine ottengono 1000 a testa

A quali giochi si applica l'induzione a ritroso?

- 1) le mosse avvengono in sequenza;
- 2) non esiste informazione privata per qualche giocatore: tutto è visibile a tutti;
- 3) i giocatori hanno un numero finito di mosse possibili in ogni fase del gioco, e il gioco termina in un numero finito di mosse.

Giochi finiti a informazione perfetta: la loro analisi è completa.²

Che giochi famosi rientrano in questa categoria? Tris, Go, Scacchi,

Dama.

²Nonostante questo, ci sono altre interessanti sfide logiche relative a questo tipo di giochi.

Un'altra conseguenza degli assiomi: come nel millepiedi

$$\begin{pmatrix} (10, 10) & (3, 15) \\ (15, 3) & (5, 5) \end{pmatrix}$$

La tabella precedente è una sintesi straordinaria della filosofia contenuta in uno dei più **importanti** libri di filosofia sociale.

*In such condition there is no place for industry, because the fruit thereof is uncertain, and consequently, not culture of the earth, no navigation, nor the use of commodities that may be imported by sea, no commodious building, no instruments of moving and removing such things as require much force, no knowledge of the face of the earth, no account of time, no arts, no letters, no society, and which is worst of all, continual fear and danger of violent death, and the life of man, **solitary, poor, nasty, brutish, and short.***

T. Hobbes, Leviathan 1651

Ancora conseguenze

Ecco due giochi:

$$\begin{pmatrix} (10, 10) & (3, 15) \\ (15, 3) & (5, 5) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} (8, 8) & (2, 7) \\ (7, 2) & (0, 0) \end{pmatrix}.$$

Nel primo gioco, in **ogni** situazione finale, **entrambi** i giocatori ottengono **di più** che nella situazione finale corrispondente nel secondo. **Però**:

Meglio scegliere lo scenario peggiore!

Ancora!

Ecco due giochi:

$$\left(\begin{array}{cc} (10, 10) & (3, 5) \\ (5, 3) & (1, 1) \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{ccc} (1, 1) & (11, 0) & (4, 0) \\ (0, 11) & (10, 10) & (3, 5) \\ (0, 4) & (5, 3) & (1, 1) \end{array} \right).$$

Nel secondo i giocatori hanno la possibilità di ottenere **le stesse** utilità, **ed altre ancora**. **Ma:**

*Avere **meno** possibilità di scelta può essere più conveniente!*

Una conclusione per la prima parte

Come si fa a sapere chi sono gli altri?... Forse non lo sapremo mai; forse è impossibile afferrare le persone: ci scivolano fra le mani come l'acqua, che non è mai la stessa.

Staying with relations, romanzo di Rose Macaulay, scrittrice inglese nata nel 1881, morta nel 1958, che visse a lungo in Italia.

Pausa per consigli commerciali



Figura: Disponibile solo in ebook. Costo 1,99 Euro

In che campi si applica la teoria?

Date le premesse:

- 1) **Economia**: 10 esperti di teoria dei giochi hanno vinto il Nobel per l'Economia;
- 2) **Scienze sociali**: lo studio di come costruire un sistema di preferenze della società a partire da quello di un gruppo di individui;
- 3) **Zoologia**: la razionalità degli animali è evidentemente diversa da quella degli umani, ma spesso più efficiente;
- 4) **Ingegneria**: reti di utenti che utilizzano Internet, aste on line, networks di computers, informatica, intelligenza artificiale. . . ;
- 5) **Scienze della vita**: genetica, medicina.

A caccia di geni

La teoria dei giochi permette di assegnare un potere relativo ai giocatori in determinate circostanze, ad esempio:

partiti in un parlamento,

azionisti in una società per azioni.

La stessa tecnica è stata utilizzata per fare una classifica di geni responsabili di malattie genetiche, sfruttando la tecnica dei **microarrays**.

Dopo aver sviluppato un **modello**, abbiamo definito nuovi **indici di potere**, ne abbiamo studiato le proprietà, e abbiamo applicato l'apparato teorico a un **caso reale**.

Early onset colon rectal cancer

L'espressione genetica ha utilizzato Human Genome U133A-Plus 2.0 GeneChip arrays (Affymetrix, Inc.).

I dati contenevano 10 campioni di individui sani e 12 provenienti da tessuti tumorali.

La letteratura medica aveva identificato 7 geni come potenzialmente responsabili della malattia: CYR61, FOS, FOSB, EGR1, VIP, KRT24, UCHL1.

I nostri risultati, con gli indici di Banzhaf, Shapley e σ^2 , da noi definito:

	B	S	σ^2
FOSB	2	1	1
CYR61	1	2	2
FOS	3	3	3
VIP	5	5	6
EGR1	10	9	9
KRT24	45	35	35

Il problema: scambio di donatori

Occorre procurare un rene sano a persone che soffrono di gravi patologie renali.

Due metodi:

- 1) rene da cadavere;
- 2) rene da donatore vivente.

Alcuni dati

La situazione italiana:

- 1) 611 trapianti nel 1992;
- 2) 1533 nel 2009.

Le donazioni da cadavere non sono sufficienti.

Problemi legati alla donazione

- 1) incompatibilità sanguigna;
- 2) incompatibilità tissutale.

Le prime sono legate al gruppo sanguigno ($0, A, B, AB$).

Le seconde all'HLA (human leukocyte antigens).

Gruppo sanguigno: Non si può ricevere una proteina (A, B) che non è presente nel sangue.

Tessuti: Test delicato, costoso, che va ripetuto nel tempo.

Ipotesi generali

- 1) Pazienti hanno preferenze sugli organi disponibili;
- 2) possono iscriversi a una lista d'attesa;
- 3) di solito hanno un donatore vivente.

Altre ipotesi

Possono essere considerati diversi modelli di scambio:

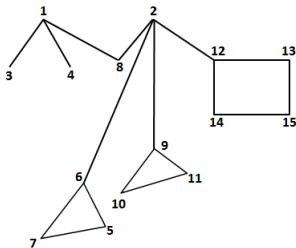
- 1) scambio a coppie;
- 2) scambi multipli senza lista d'attesa;
- 3) scambi multipli e lista d'attesa.

Unica possibilità: il paziente A riceve il rene dal donatore di B e viceversa.

Paziente A_1 riceve il rene dal donatore di A_2 , ... paziente A_{n-1} riceve il rene dal donatore di A_n , A_n riceve il rene dal donatore di A_1 .

Paziente A_1 riceve il rene dal donatore di A_2 , ... paziente A_{n-1} riceve il rene dal donatore di A_n , il donatore di A_1 offre il rene alla lista d'attesa, il paziente A_n ottiene alta priorità nella lista d'attesa.

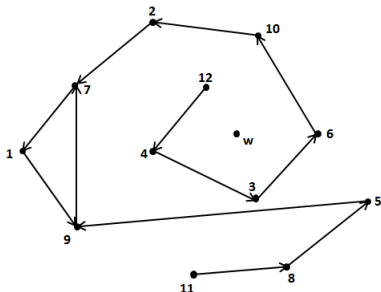
Esempio di scambi a coppie



Preferenze **dicotomiche**: ogni rene compatibile valutato uguale agli altri e meglio di ogni incompatibile.

Caso con lista d'attesa

Caso che presenta molte varianti:



Preferenze strette. I cicli che si formano sono tolti dal processo.

Le catene possono esser considerate in maniera diversa, dando origine a modelli differenti.

Aspetti legati alla teoria dei giochi

Contributi della teoria dei giochi a questa area:

- 1) algoritmi di matching;
- 2) studio dell'efficienza dei matching;
- 3) meccanismi di priorità per scegliere tra matching ugualmente efficienti;
- 4) studio della manipolabilità.

Slide finale

Tra qualche giorno la presentazione si trova su:

www.robortolucchetti.com

Grazie per l'attenzione