# Teoria dei Giochi Cooperativi

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano

# Definizione di gioco cooperativo

Un gioco è cooperativo se gli accordi tra i giocatori possono ritenersi vincolanti.

Esempi

1. Suddividere le spese all'interno di un condominio
2. suddividere gli utili di un'attività comune
3. interazioni tra i venditori di un certo bene e persone interessate a comperarlo

# Come si distinguono i giochi

La teoria distingue tra:

1. Giochi a utilità trasferibile (TU), detti anche a pagamenti laterali
2. Giochi a utilità non trasferibile (NTU), detti anche senza pagamenti laterali

La distinzione sta nel fatto nei giochi TU si assume che le utilità (o costi) siano espressi in maniera monetaria, e lo scambio di moneta si considera sempre possibile.

# Un caso particolare di gioco NTU

Due giocatori devono dividersi una certa somma, a condizione di arrivare a un accordo su come farlo.

Se due persone ricevono del denaro non è detto che provino la stessa soddisfazione. Occorre quindi un modo di misurarla.

Usiamo le funzioni di utilità.

# Un esempio

$$u(x) = x, \quad v(x) = \sqrt{x}.$$

Se si devono dividere la quantità 1, e al primo viene assegnato $x$, il secondo riceve $1 - x$.

Poiché $x = u$ si ha che $v = \sqrt{1 - u}$

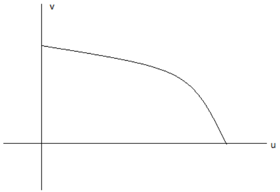
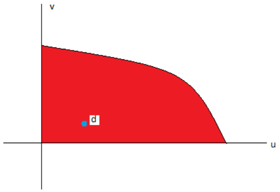



Figura: *La curva nel piano delle utilità. Se $(u, v)$ appartiene alla curva, allora esiste un modo di dividere 1 in modo che il primo abbia utilità $u$, il secondo $u$.*

# Il modello di Nash




Nash propone di considerare anche la zona rossa come insieme di utilità possibili.

Idea buona o cattiva?

1. cattiva se è inutile o fa danno
2. buona se è utile

# Il modello

Un gioco di contrattazione:

$(C, d)$, con $C \subset \mathbb{R}^2$ chiuso convesso limitato $d \in C$ un punto in $\Re^2$.

L'insieme di tutti i giochi di contrattazione:

$\mathcal{C}$ dei problemi $(C, d)$ tali che esiste $z \in C$ con $z_1 > d_1$, $z_2 > d_2$);

Una soluzione al problema della contrattazione è una funzione $f$

$$f : \mathcal{C} \to \mathbb{R}^2,$$

tale che $f[(C, d)] \in C$, per ogni $(C, d) \in \mathcal{C}$
cioè un meccanismo che, dato un problema di contrattazione, trova automaticamente una distribuzione di utilità per i giocatori.

# Le proprietà

Che proprietà dovrebbe avere una soluzione?

1. Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la seguente trasformazione del piano: $L(x_1, x_2) = (ax_1 + c, bx_2 + e)$, con $a, b > 0$ e $c, e \in \mathbb{R}$. Allora
$$f[L(C), L(d)] = L[f(C, d)];$$
invarianza rispetto a trasformazioni di utilità ammissibili;
2. Sia $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la seguente trasformazione del piano: $S(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$. Supponiamo che un problema $(C, d)$ soddisfi $(S(C), S(d)) = (C, d)$. Allora
$$f(C, d) = S[f(C, d)];$$
simmetria
3. Dati due problemi $(A, x)$ e $(C, x)$, se $A \supset C$, e se $f[(A, x)] \in C$,allora $f[(C, x)] = f[(A, x)]$ independenza dalle alternative irrilevanti
4. Dato $(C, x)$, se $y \in C$ e esiste $u \in C$ tale $u >> y$, allora $f[(C, x)] \neq y$ efficienza.

## Le proprietà: come si spiegano?

1. invarianza rispetto a trasformazioni di utilità ammissibili Non importa se cambiamo le unità di misura sugli assi o spostiamo l'origine, la soluzione non dipende da simili trasformazioni;
2. simmetria Se due giocatori possono scambiarsi le distribuzioni di utilità, allora il risultato deve essere lo stesso per entrambi
3. independenza dalle alternative irrilevanti Togliendo un sottoinsieme di alternative a un dato insieme, lasciando la soluzione nell'insieme più piccolo, questa rimane soluzione anche nell'insime più piccolo
4. efficienza. L'idea di Nash era buona! Serve (per dimostrare il teorema!) aggiungere la parte rossa del disegno, e non fa danni perché la soluzione rimane sulla curva.

# Il teorema

**Teorema**

*Esiste unica $f$ che soddisfa le proprietà precedenti. Se $(C, x) \in \mathcal{C}$, $f(C, x)$ è il punto che massimizza su $C \cap \{(u, v) : u \geq x_1, v \geq x_2\}$ la funzione $g(u, v) = (u - x_1)(v - x_2)$.*

Cioè i giocatori devono massimizzare il prodotto delle loro utilità.

# Il modello di Nash

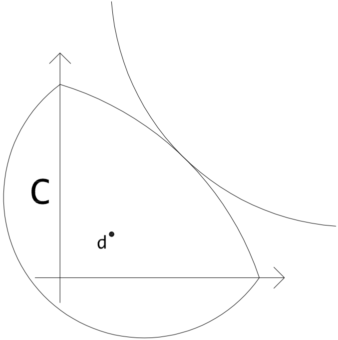



Figura: *Il punto di contatto tra l'insieme e l'iperbole rappresenta la soluzione del problema secondo Nash*

# Giochi TU

Un gioco cooperativo prevede il fatto che i giocatori possano coalizzarsi tra loro liberamente, per ottenere vantaggi personali.

Ogni coalizione è in grado di garantisi una certa utilità, che può essere spartita tra i membri della coalizione. Un gioco è individuato da:

1. $N$, l'insieme dei giocatori, e tutti i suoi sottoinsiemi, chiamati coalizioni
2. Una funzione
$$v : 2^N \to \mathbb{R},$$
tale che $v(\emptyset) = 0$.

$2^N$ rappresenta la famiglia delle coalizioni di $N$. La notazione ricorda che se un insieme ha $n$ elementi la famiglia dei suoi sottoinsiemi ne contiene $2^n$. Ad esempio per $N = \{1, 2, 3\}$ si ha: $\emptyset$, la coalizione priva di persone (insieme vuoto)
$\{1\}\{2\}\{3\}$, le coalizioni fatte da un solo elemento
$\{1, 2\}\{1, 3\}\{2, 3\}$, le coalizioni fatte da due elementi
$N$, detta la grande coalizione.

# Esempio 1: compratori e venditori

- Un venditore e due compratori di un bene prezioso. Il giocatore 1, il venditore, valuta 1 il suo bene. 2 è disposta a pagare fino a 2 e 3 fino a 3. Ecco il gioco:

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = 3, \ v(N) = c.$$

- Due venditori e un compratore:

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0,$$

$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1.$$

# Esempio 2

Un padre decide di dare una bella somma di denaro a quello dei tre figli che riceve più voti (ciascuno ha un voto: non si bara!)

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$

$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1.$$

Due figli possono accordarsi sul voto, quindi due persone formano una coalizione vincente. ($v(A) = 1$ coalizione vincente,$v(A) = 0$ coalizione perdente)

# Esempio 3

L'areoporto dell'isola di Erehwon ha bisogno di una nuova pista di atterraggio, richiesta da tre compagnie che istituiscono un volo giornaliero per l'isola. La prima compagnia ha bisogno di una pista di 1 Km, che costa $c_1$, la seconda di $1,5$ Km, che costa $c_2$, la terza di 2 Km, che costa $c_3$. Il gioco:

$$v(\{1\}) = c_1, v(\{2\}) = c_2, v(\{3\}) = c_3, v(\{1,2\}) = c_2,$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = c_3.$$

# L'idea di soluzione

Un esito di un gioco cooperativo, se $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ è un vettore

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

$x$ rappresenta la distribuzione di utilità (o di costi) proposta

Differenza fondamentale con la teoria non cooperativa:

Non cooperativa strategie

Cooperativa utilità

# Le imputazioni

Che proprietà possono essere ragionevolmente richieste a una soluzione? $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ deve verificare

1. $x_i \geq v(\{i\})$ for all $i$
2. $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

1 pone l'accento sulla soddisfazione individuale

2 pone l'accento sull'efficienza collettiva

Se il gioco è interessante, tutti i giocatori si mettono d'accordo: nessuno se ne va (prima condizione).

L'accordo deve essere efficiente.

# Il nucleo

## Definizione

*Il* nucleo *del gioco v, denotato C(v), l'insieme:*

$$C(v) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \quad \wedge \quad \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \quad \forall S \subset N \right\}.$$

# Il nucleo negli esempi: Esempio 1.2

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0,$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1.$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 + x_3 \geq 1$$

$$x_2 + x_3 \geq 1$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

Risultato:

$$C(v) = \{(1,0,0)\}$$

# Il nucleo negli esempi: Esempio 1.1

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = 3,\ v(N) = 3.$$

Risultato:

$$C(v) = \{(p, 0, 3-p) : 2 \leq p \leq 3\}.$$

In questo caso il nucleo ha il significato di individuare il prezzo $p$ di vendita.

Osservare il ruolo della presenza del giocatore 2 nella determinazione del prezzo di scambio tra 1 e 3.

# Il nucleo negli esempi: Esempio 2

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1.$$

Risultato:

$$C(v) = \emptyset!$$

# Un'altra idea di soluzione: il valore Shapley

Dato il gioco $v$, definiamo valore Shapley il vettore

$$\sigma(v) = (\sigma_1(v), \sigma_2(v), \dots, \sigma_n(v))$$

tale che

$$\sigma_i(v) = \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \left[ v(S \cup \{i\}) - v(S) \right].$$

dove

1. $a$ indica il numero dei giocatori in una qualunque coalizione $a$
2. $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times 3 \times 2 \times 1$
3. $[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$ è il valore marginale che il giocatore $i$ porta alla coalizione $S \cup \{i\}$.

# Shapley negli esempi: Esempio 1.2

$$v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1,2\}) = 0,$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = 1.$$

$$\sigma_1(v) = \frac{0!2!}{3!}[v(\{1\}) - v(\{\emptyset\})] + \frac{1!1!}{3!}[v(\{1,2\}) - v(\{2\})] +$$
$$+\frac{1}{6}[v(\{1,3\}) - v(\{3\})] + \frac{1}{3}[v(\{N\}) - v(\{2,3\})] = \frac{1}{6},$$

analogamente,

$$\sigma_2(v) = \frac{1}{6},$$
$$\sigma_3(v) = \frac{4}{6}.$$

Risultato:

$$\sigma(v) = (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}).$$

# Shapley negli esempi: Esempio 1.1

$$v(\{1\}) = 1, v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2,3\}) = 0,$$
$$v(\{1,2\}) = 2, v(\{1,3\}) = 3,\ v(N) = 3.$$

Risultato:

$$\sigma(v) = (\frac{13}{6}, \frac{1}{6}, \frac{4}{6}).$$

Il valore Shapley in questo caso non fornisce un risultato significativo

# Shapley negli esempi: Esempio 3

$$v(\{1\}) = c_1, v(\{2\}) = c_2, v(\{3\}) = c_3, v(\{1,2\}) = c_2,$$
$$v(\{1,3\}) = v(\{2,3\}) = v(N) = c_3.$$

Risultato:

$$\sigma(v) = (\frac{c_1}{3}, \frac{3c_2 - c_1}{6}, \frac{6c_3 - c_1 - 3c_2}{6}).$$

Risultato bellissimo!

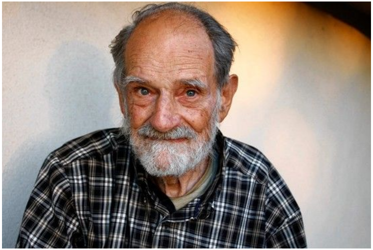


Figura: *L. Shapley, Nobel prize 2012*