Teoria dei Giochi non Cooperativi

Roberto Lucchetti

Politecnico di Milano

Descrizione del gioco

I Giochi della teoria

1. L'insieme dei giocatori
2. La situazione iniziale
3. Le sue possibili evoluzioni
4. I suoi esiti finali

Perché studiare i giochi?

I giochi sono una situazione in cui più persone (detti giocatori):

- interagiscono, facendo le loro mosse
- dopo un certo numero di mosse arrivano a uno stato finale, che dipende dalle scelte di tutti
- hanno delle preferenze su tutte le situazioni finali del gioco stesso.

Il gioco

potente rappresentazione simbolica della vita di ogni giorno.

Parte prima: Le basi della teoria

Egoismo

Ogni giocatore tiene conto delle sue preferenze sugli esiti del gioco

Le preferenze degli altri sono analizzate solo per studiare quale possa essere il loro comportamento

Razionalità

Ipotesi più complicata che ha conseguenze a vari livelli.

Livello 1

I giocatori:

1. comprendono le regole del gioco;
2. sanno ordinare tutti gli esiti del gioco, in accordo con le loro preferenze, in maniera coerente;
3. sanno costruire una funzione di utilità associata alle loro preferenze;
4. sanno utilizzare le regole della probabilità;
5. sanno fare un'analisi completa del gioco;
6. sanno applicare la teoria delle decisioni.

Ordinare (in maniera coerente) le preferenze

- non sempre facile quando gli esiti possibili sono moltissimi: occorre metterli tutti in classifica (si dice definire un preordine $\succeq$ su sugli esiti: $x \succeq y$ significa che l'esito x è meglio dell'esito y, o che i due sono indifferenti);
- se preferisco una mela a una pera e una pera a un arancio, allora che preferisco tra mela e arancio?

Proprietà che in matematica si chiamano: la prima, saper dare un ordinamento totale, la seconda proprietà transitiva.

Funzioni utilità

Si chiama Funzione di utilità associata al preordine $\succeq$ una funzione u che verifica

$$u(x) \geq u(y) \Longleftrightarrow x \succeq y.$$

Nel caso di preordini totali su insiemi finiti esiste sempre. Non è unica

Le regole della probabilità

I giochi possono prevedere eventi casuali (lancio di monete o di dadi, per esempio). In questo caso i giocatori devono sapere calcolare di conseguenza l'utilità di fare certe scelte.

Esempio

La funzione di utilità è, se x rappresenta una quantità in Euro:

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0 \\ x^3 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Se il lancio di una moneta viene testa il giocatore riceve 4 Euro. Se viene croce ne deve pagare 10. Che cosa fa il giocatore, gioca oppure no?

$$\frac{1}{2}u(T) + \frac{1}{2}u(C) = \dots$$

Analisi completa

Saper fare un'analisi completa del gioco significa:

- saper fare tutti i ragionamenti necessari su come ottenere i risultati migliori, e sapere che ragionamenti possono fare gli altri giocatori (livello uno);
- sapere analizzare le conseguenze dei ragionamenti fatti al livello uno (livello due);
- sapere analizzare le conseguenze dei ragionamenti fatti al livello due (livello tre)
- ...
- ...

La teoria delle decisioni

È una teoria matematica che si occupa di come deve agire un decisore che agisce da solo.

Data una funzione di utilità u, definita sulle scelte possibili x, con $x \in X$, il decisore deve risolvere il problema di:
scegliere quella(e) $\bar{x}$ che massimizza u sull'insieme delle scelte possibili:
Per ogni x

$$u(x) \leq u(\bar{x}) = \max_{x \in X} u(x)$$

Come si distinguono i giochi

La teoria distingue tra:

1. Giochi non cooperativi
2. Giochi cooperativi

La distinzione sta nel fatto che nei giochi cooperativi si assume che eventuali accordi tra giocatori siano vincolanti.

Un gioco non cooperativo: il Dilemma del prigioniero

Uno cooperativo: Condividere le spese per servizi comuni.

Come si descrive un gioco non cooperativo

La teoria distingue tra:

1. Giochi in forma estesa
2. Giochi in forma strategica

Descrivere un gioco in forma estesa significa specificare in linguaggio matematico tutte le situazioni possibili del gioco: in genere si fa con l'Albero del gioco

In forma strategica il gioco è descritto in maniera più sintetica, come vedremo.

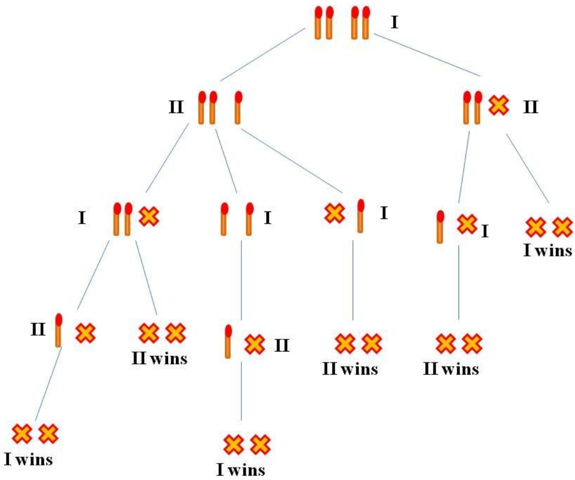
La descrizione del gioco

1. due giocatori che giocano a turno
2. 4 fiammiferi sul tavolo divisi in due mucchietti
3. I giocatori possono togliere o uno o due (almeno uno) fiammiferi da un solo mucchietto
4. chi toglie l'ultimo perde

Ecco l'albero del gioco:

L'albero del gioco

Ecco l'albero del gioco.



La strategie

La strategia per ogni giocatore è la specificazione di una mossa (possibile) in ogni nodo etichettato col suo nome
Per il giocatore I

1. togliere un fiammifero al primo turno, al secondo se ne trova due toglierne uno
2. togliere un fiammifero al primo turno, al secondo se ne trova due toglierne due
3. togliere due fiammiferi al primo turno, al secondo se ne trova due toglierne uno
4. togliere due fiammiferi al primo turno, al secondo se ne trova due toglierne due

Un altro esempio

- Due giocatori con una pistola a sei colpi ciascuno. In ogni pistola c'è un solo proiettile. I giocatori mettono un euro sul piatto per aver il diritto di giocare.
- Il giocatore 1 aggiunge un euro se decide di giocare, se invece si ritira ne aggiunge 2
- Nel caso il giocatore 1 sopravviva al primo stadio, il giocatore due ha le stesse opzioni
- se entrambi sono vivi, si dividono il piatto, se uno morto l'altro si tiene tutto il piatto
- le loro utilità sono monetarie

L'albero della roulette russa

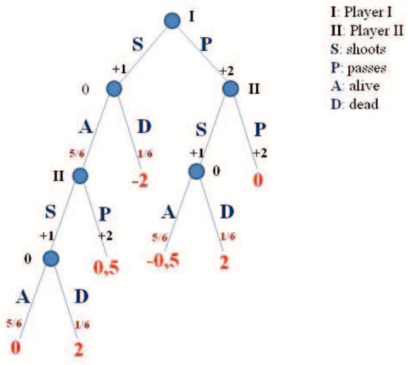
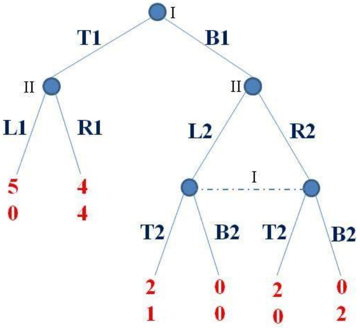


Figura: La roulette russa

La differenza rispetto all'esempio precedente è la presenza di eventi casuali nel gioco

Un altro esempio



La differenza importante rispetto all'esempio precedente è che ora il giocatore I se decide di andare verso destra nell'albero non può osservare la scelta che fa il secondo giocatore.

Gioco a informazione imperfetta

La forma strategica

La scelta di una strategia per ogni giocatore determina l'esito del gioco. Per una delle ipotesi di razionalità fatte, i giocatori sugli esiti sanno esprimere le loro preferenze, tramite una funzione di utilità. Quindi un gioco è descritto quando si conoscono:

1. l'insieme delle strategie per ogni giocatore
2. le funzioni di utilità per ogni giocatore

Giochi finiti: bimatrici

Nel caso di due giocatori, un modo efficace di descrivere il gioco è tramite una tabella, detta bimatrice

Un esempio

$$\begin{pmatrix} (10, 10) & (0, 11) \\ (11, 0) & (1, 1) \end{pmatrix}.$$

Un giocatore (detto I) sceglie una riga, l'altro una colonna, il risultato è una casella dove si legge una coppia di numeri: (utilità del primo, utilità del secondo).

Come si risolve il gioco precedente?

In questo caso basta utilizzare la teoria delle decisioni! Infatti il primo:

$$\begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 11 & 1 \end{pmatrix}$$

guadagna di più giocando la seconda riga, qualunque cosa decida di fare il secondo.

Quindi il primo gioca la seconda riga, il secondo la seconda colonna, e l'esito del gioco è $(1, 1)$.

Il gioco è risolto col metodo di eliminazione delle strategie dominate.

Un altro gioco famoso

$$\begin{pmatrix} (10,5) & (1,1) \\ (0,0) & (5,10) \end{pmatrix}.$$

In questo caso il metodo precedente non funziona!

Ragionevole aspettarsi che questa situazione succeda spesso.

In genere la nostra scelta è buona o cattiva a seconda delle scelte dell'altro.

La best reaction

Una coppia di strategie è un equilibrio se

Nessun giocatore ha interesse a cambiare la sua

dando per scontato che gli altri non cambino la loro.

Una formula:

se f, g sono le utilità dei due giocatori:

- $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y})$ per ogni $x \in X$
- $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y)$ per ogni $y \in Y$.

Rivisitando il gioco famoso

$$\begin{pmatrix} (10,5) & (1,1) \\ (0,0) & (5,10) \end{pmatrix}.$$

gli equilibri di Nash portano come risultato $(10,5)$ e $(5,10)$.

Necessità della comunicazione

Un caso particolare: gioco a somma zero

Si chiama gioco a due persone a somma zero un gioco dove per ogni esito la somma delle utilità dei due giocatori è nulla.

Sono giochi strettamente competitivi e per descriverli basta una matrice, che riporta l'utilità del primo.

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

I valori conservativi

Supponiamo esistano v, una riga $\bar{\imath}$ e una colonna $\bar{\jmath}$ tali che $p_{\bar{\imath}j} \geq v$ per ogni$j$ e $p_{i\bar{\jmath}} \leq v$ per ogni i. Primo giocatore ottiene *almeno* v, il secondo non paga più di v. Inoltre $p_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \geq v$ e $p_{\bar{\imath}\bar{\jmath}} \leq v$.

Allora è chiaro che v è quanto il secondo paga al primo, e che questo si ottiene con il primo che gioca $\bar{\imath}$ e il secondo $\bar{\jmath}$.

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 4 \\ 5 & 9 & 3 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Il primo giocando la terza riga si garantisce almeno 6, il secondo giocando la terza colonna si garantisce di pagare non più di 6. È l'esito del gioco.

Soluzioni multiple non sono un problema

$$\begin{pmatrix} 7 & 5 & 8 & 5 & 20 \\ 3 & 0 & 4 & 3 & 200 \\ 9 & 5 & 9 & 5 & 9 \\ 20 & 0 & 1 & 5 & 20 \end{pmatrix}.$$

Prima e terza riga sono ottimali per il primo, seconda e quarta colonna per il secondo. Il risultato è sempre 5. 5 non rappresenta situazione di equilibrio.

E se tale v non esiste?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Questo gioco non ha equilibrio. Ma si può lo stesso giocare in maniera strategica?

Supponiamo di osservare che il primo non gioca mai la la prima riga. Allora quando tocca a noi giocheremo la seconda colonna, e non prderemo.

In giochi come quello di sopra non si può utilizzare sempre la stessa strategia. Dunque conviene pensare, piuttosto che alle strategie, alla probabilità con cui giocare ogni strategia.

Sappiamo calcolare anche in questo caso i pagamenti (attesi) sfruttando le leggi della probabilità.

Un teorema straordinario

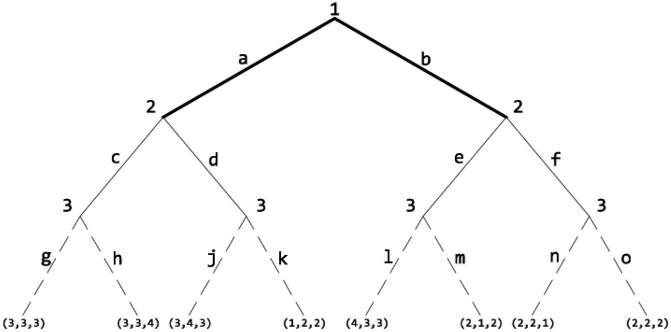
Teorema

Ogni gioco finito a due persone a somma zero ammette equilibrio in strategie miste.

La politica

Tre politici devono votare, in sequenza e con voto palese, se ridurre il numero dei parlamentari. Tutti e tre sono contrari, ma vorrebbero votare a favore per fare bella figura. Che cosa succede? E conviene votare per primo, secondo o terzo?

L'albero della politica



Come trovare l'esito in questo caso

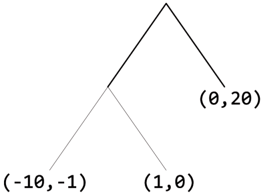
Abbiamo 4 esiti diversi, cui assegniamo i valori 1,2,3,4 per ogni giocatore. 4 corrisponde a votare per la riduzione, quando gli altri hanno votato contro: si fa bella figura, e si ottiene quel che si voleva. La situazione opposta, con pagamento 1, se si vota contro e la riduzione passa.

Come si risolve un gioco come questo?

Con induzione a ritroso.

Si parte dai nodi che portano a situazione finale. In ognuno di questi i giocatori sanno quale sarà la scelta di chi deve decidere (il terzo nell'esempio). Poi si passa a quelli superiori ......

Gioco del gelato



Questa è la forma strategica:

$$\begin{pmatrix} (0, 20) & (0, 20) \\ (-10, -1) & (1, 0) \end{pmatrix}.$$

Gli equilibri di Nash sono due: (prima riga, prima colonna)$=(0, 20)$ e (seconda riga, seconda colonna)$=(1, 0)$. Ma solo uno si trova con l'induzione a ritroso.

(prima riga, prima colonna)$=(0, 20)$ è un equilibrio credibile?

Conclusione

L'equilibrio di Nash è il concetto principe della teoria cooperativa.

Ma se è possibile integrare l'analisi in casi particolari altri concetti (che raffinano l'idea di Nash) diventano importanti.

Il teorema di Nash, estendendo quello di von Neumann, garantisce che anche i giochi (finiti) non a somma zero hanno equilibrio in strategie miste.

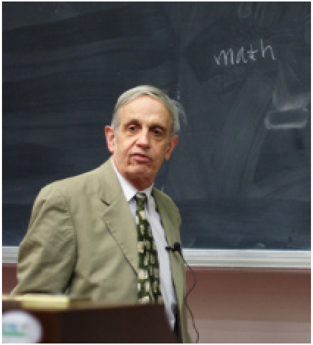


Figura: *J.F. Nash, Nobel prize 1994*