

# In Action With Math

Competizione e Strategia - Teoria dei Giochi

Roberto Lucchetti - Giulia Bernardi

Politecnico di Milano  
[www.gametheory.polimi.it](http://www.gametheory.polimi.it)

18 novembre 2015

Gli accordi dei giocatori sono **vincolanti**

- suddivisione spese comuni
- accordi tra compratori e venditori
- organi di governo...

## Definizione

Un gioco cooperativo è descritto da una coppia  $(N, v)$  dove

- $N$  è l'insieme dei giocatori
- $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$  è la funzione di utilità del gioco.

Ad ogni coalizione (i.e. sottoinsieme di  $N$ ) si associa un valore numerico.

## Esempio #1

### Due venditori e un compratore

Ci sono due persone che vogliono vendere lo stesso tipo di macchina e una persona disponibile ad acquistarla.

$$\begin{aligned}v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) &= 0 \\v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(N) &= 1\end{aligned}$$

### Due compratori e un venditore

Una persona vuole vendere un oggetto e stima il suo valore  $a$ , due persone sono disposte a comprarlo pagandolo  $b$  e  $c$ .

$$\begin{aligned}v(\emptyset) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) &= 0 \\v(\{1\}) = a \quad v(\{1, 2\}) = b \quad v(\{1, 3\}) = v(N) &= c\end{aligned}$$

## Esempio #2

### Gioco di maggioranza

In un'azienda ci sono tre azionisti, il primo ha il 50% delle quote, il secondo il 49% e il terzo solo l'1%. Una decisione viene approvata se i soci che la sostengono superano la maggioranza delle quote.

Coalizioni vincenti  $v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(\{1, 2, 3\}) = 1$

Coalizioni perdenti  $v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0$

$$v = [q; w_1, w_2, \dots, w_n] \quad v(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } \sum_{i \in T} w_i \geq q \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Superare la maggioranza  $\implies$  coalizione vincente

Per un gioco cooperativo la **soluzione** è un vettore  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  che propone una distribuzione della utilità (o dei costi, o del potere) tra i giocatori.

## Esempi

- dividere delle spese → quanto ciascuno deve pagare
- gestire una bancarotta → quanto rimborsare ad ogni creditore
- organi di governo → valutare il potere di ogni rappresentante

Proprietà da richiedere ad un concetto di soluzione  $(x_1, \dots, x_n)$  :

- soddisfazione individuale
- soddisfazione collettiva
- efficienza:  $x_1 + \dots + x_n = v(N)$

## Nucleo

$$(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ e } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ per ogni insieme } S$$

## Due venditori e un compratore

$$\begin{aligned}v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{1, 2\}) &= 0 \\v(\{1, 3\}) = v(\{2, 3\}) = v(N) &= 1\end{aligned}$$

Condizioni per trovare il nucleo

$$\begin{aligned}x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \\x_1 + x_2 &\geq 0 & x_2 + x_3 &\geq 1 & x_1 + x_3 &\geq 1 \\x_1 + x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$$

$$\text{Nucleo} = \{(0, 0, 1)\}$$

## Esempio #1

Un venditore e due compratori

$$\begin{aligned}v(\emptyset) &= v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0 \\v(\{1\}) &= a \quad v(\{1, 2\}) = b \quad v(\{1, 3\}) = v(N) = c\end{aligned}$$

Condizioni per trovare il nucleo

$$\begin{aligned}x_1 &\geq a & x_2, x_3 &\geq 0 \\x_1 + x_2 &\geq b & x_2 + x_3 &\geq 0 & x_1 + x_3 &\geq c \\x_1 + x_2 + x_3 &= c\end{aligned}$$

$$\text{Nucleo} = \{(p, 0, c - p) \text{ con } b \leq p \leq c\}$$

Individua il prezzo  $p$  di vendita (che dipende anche dalle valutazioni del giocatore 2).



## Indice di Banzhaf

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S \cup i) - v(S)]$$

$$\beta_i(v) = \frac{\# \text{coalizioni perdenti che vincono se } i \text{ si unisce a loro}}{\# \text{tutte le coalizioni che non contengono } i}$$

### Gioco di maggioranza

$$\begin{aligned}v(\emptyset) = v(\{1\}) = v(\{2\}) = v(\{3\}) = v(\{2, 3\}) = 0 \\v(\{1, 2\}) = v(\{1, 3\}) = v(N) = 1\end{aligned}$$

Coalizioni che vincono se 1 si unisce a loro:  $\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}$

Coalizioni che vincono se 2 si unisce a loro:  $\{1\}$

Coalizioni che vincono se 3 si unisce a loro:  $\{1\}$

$$\beta = \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$$

## Valore Shapley

$$\sigma_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup i) - v(S)]$$

Le coalizioni si formano seguendo l'ordine di arrivo dei giocatori:

- tutti gli ordini sono equiprobabili
- quando il giocatore  $i$  si unisce alla coalizione  $S$  porta il suo *contributo marginale*

## Aeroporto

Tre diverse compagnie aeree sono interessate a costruire una nuova pista di atterraggio. La prima compagnia ha bisogno solo di 1km di pista il cui costo di realizzazione sarebbe  $c_1$ , la seconda compagnia di 1,5 km al costo  $c_2$ , mentre la terza di 2 km al costo  $c_3$ .

$$\begin{array}{lll} v(\emptyset) = 0 & & v(N) = c_3 \\ v(\{1\}) = c_1 & v(\{2\}) = c_2 & v(\{3\}) = c_3 \\ v(\{1, 2\}) = c_2 & v(\{1, 3\}) = c_3 & v(\{2, 3\}) = c_3 \end{array} .$$

## Aeroporto

$$\begin{aligned}
 v(\emptyset) &= 0 & v(N) &= c_3 \\
 v(\{1\}) &= c_1 & v(\{2\}) &= c_2 & v(\{3\}) &= c_3 \\
 v(\{1, 2\}) &= c_2 & v(\{1, 3\}) &= c_3 & v(\{2, 3\}) &= c_3
 \end{aligned}$$

	1	2	3
123	$c_1$	$c_2 - c_1$	$c_3 - c_2$
132	$c_1$	0	$c_3 - c_1$
213	0	$c_2$	$c_3 - c_2$
231	0	$c_2$	$c_3 - c_2$
312	0	0	$c_3$
321	0	0	$c_3$
<b>Shapley</b>	$\frac{2c_1}{6}$	$\frac{3c_2 - c_1}{6}$	$\frac{6c_3 - 3c_2 - c_1}{6}$

$$\begin{aligned}v(\emptyset) &= 0 & v(N) &= c_3 \\v(\{1\}) &= c_1 & v(\{2\}) &= c_2 & v(\{3\}) &= c_3 \\v(\{1, 2\}) &= c_2 & v(\{1, 3\}) &= c_3 & v(\{2, 3\}) &= c_3\end{aligned}$$

## Indice di Shapley

$$\sigma_i = \left( \frac{c_1}{3}, \frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{6}, c_3 - \frac{c_2}{2} - \frac{c_1}{6} \right)$$

- conveniente per ognuno
- efficiente
- simmetrico

Tre amici vogliono dividere una corsa in taxi per tornare a casa, i costi per ogni possibile gruppo sono:

Ale = 10€

Bob = 10€

Chiara = 14€

Tutti insieme = 20€

Ale&Bob = 12€

Ale&Chiara = 18€

Bob&Chiara = 18€



Qual è il gioco associato? Quanto dovrebbe pagare ognuno?

$$\begin{array}{lll}
 v(\emptyset) = 0 & & v(N) = 20 \\
 v(\{A\}) = 10 & v(\{B\}) = 10 & v(\{C\}) = 14 \\
 v(\{A, B\}) = 12 & v(\{A, C\}) = 18 & v(\{B, C\}) = 18
 \end{array}$$

	A	B	C
ABC	10	2	8
ACB	10	2	8
BAC	2	10	8
BCA	2	10	8
CAB	4	2	14
CBA	2	4	14
<b>Shapley</b>	<b>30/6</b>	<b>30/6</b>	<b>60/6</b>

Ale: 5€ Bob: 5€ Chiara: 10€