

# In Action With Math

Competizione e Strategia - Teoria dei Giochi

Roberto Lucchetti - Giulia Bernardi

Politecnico di Milano  
[www.gametheory.polimi.it](http://www.gametheory.polimi.it)

11 novembre 2015

## Cows&Candies

Ci sono tre allevatori le cui mucche pascolano su un terreno comune formato da 12 campi. Ogni mattina ciascun allevatore decide quante delle sue sei mucche far uscire a pascolare. Ogni mucca occupa un campo e tutte le mucche pascolano sui campi rimasti liberi brucando l'erba. Ovviamente più mucche ci sono, meno erba rimane per ciascuna di loro.

A fine giornata il contadino munge le mucche e ogni mucca gli permette di produrre tanti litri di latte quanti sono i campi rimasti liberi quel giorno.

Quante mucche fareste uscire ogni mattina per aumentare il più possibile la vostra produzione di latte?

Tre giocatori.

$x_1$  = mucche di 1

$x_2$  = mucche di 2

$x_3$  = mucche di 3

$X = x_1 + x_2 + x_3$  campi occupati

$g_1 = (12 - X) \cdot x_1$  latte prodotto da 1

$g_2 = (12 - X) \cdot x_2$  latte prodotto da 2

$g_3 = (12 - X) \cdot x_3$  latte prodotto da 3

### Problema

Scegliere  $x_1, x_2, x_3$  in modo che  $g_1, g_2, g_3$  siano il più grande possibile.

Proviamo a giocare!

### Ultimo tentativo

Ogni allevatore verrà premiato con un numero di caramelle uguale ai litri di latte prodotto.

Non esiste collaborazione tra i giocatori.

- dilemma del prigioniero
- gioco dei tre fratelli
- roulette russa
- scacchi, dama
- cows&candies

Come abbiamo risolto questi giochi?

## Gioco in forma strategica

Due o più giocatori con un numero finito di mosse a disposizione. Per ogni possibile esito del gioco ci sono dei valori assegnati a ciascun giocatore.

Possiamo descriverlo usando:

- insieme  $N$  dei giocatori
- insieme  $X_i$  delle strategie del giocatore  $i \in N$
- funzione di utilità di ogni giocatore  $f_i$

## Dilemma del prigioniero

Due persone sono sospettate di aver commesso un reato molto grave. Il giudice fa ad entrambi questa proposta: "Se confessate entrambi vi condannerò a 5 anni di prigione. Se confessa solo uno di voi, lo premierò con la liberà e il secondo sconterà una pena di 9 anni. Se nessuno dei due confesserà, vi condannerò a 2 anni di prigione per reati minori."

	<i>C</i>	<i>NC</i>
<i>C</i>	(5, 5)	(0, 9)
<i>NC</i>	(9, 0)	(2, 2)

$X = Y = \{Confessare, NonConfessare\}$

*L'esito del gioco è rappresentato dagli anni di prigione.*

## Due giocatori

Il primo giocatore gioca la strategia  $x$ , il secondo giocatore gioca la strategia  $y$ .

Se  $f(x, y) = a$  e  $g(x, y) = b$

allora il valore assegnato al primo giocatore è  $a$ , al secondo giocatore è  $b$ .

$$x \rightarrow \left( \begin{array}{c} y \\ \downarrow \\ (a, b) \end{array} \right)$$

### Give me Money

Due giocatori, ognuno deve scrivere un messaggio segreto scegliendo tra

- dammi 1000 euro
- dai all'altro concorrente 4000 euro.

Il presentatore legge i messaggi e fa quello che c'è scritto.

Cosa scrivereste?

$$\begin{pmatrix} (1000, 1000) & (5000, 0) \\ (0, 5000) & (4000, 4000) \end{pmatrix}$$

## Strategie dominate

Un giocatore ha una strategia **dominata**  $x$  se qualsiasi sia la strategia degli altri giocatori, esiste una strategia  $x_1$  che gli permette di guadagnare di più rispetto alla strategia  $x$ . Si dice che  $x_1$  domina  $x$ .

Se la strategia  $x$  dominata è del primo giocatore, avremo

$$f(x_1, y) > f(x, y)$$

per ogni strategia  $y$  del secondo giocatore.

## Battaglia dei sessi

Una coppia deve decidere se andare al cinema o a teatro, il primo giocatore preferisce il cinema, il secondo il teatro anche se entrambi preferiscono uscire insieme all'uscire da soli.

$$\begin{pmatrix} (3, 2) & (1, 1) \\ (0, 0) & (2, 3) \end{pmatrix}$$

## Definizione (Equilibrio di Nash)

Dato il gioco  $\{X, Y, f, g\}$  tra due giocatori diremo che la coppia di strategie  $(\bar{x}, \bar{y})$  è un equilibrio di Nash se

$$\begin{aligned}f(\bar{x}, \bar{y}) &\geq f(x, \bar{y}) \text{ per ogni } x \in X \\g(\bar{x}, \bar{y}) &\geq g(\bar{x}, y) \text{ per ogni } y \in Y\end{aligned}$$

Nessuno dei due giocatori ha incentivo a giocare una strategia diversa se l'altro giocatore sta giocando la strategia di equilibrio

## Teorema (Nash)

*Ogni gioco ammette almeno un equilibrio di Nash in strategie pure o miste.*

Il primo giocatore sceglie un numero tra 0 e 1, il secondo sceglie un numero tra 0 e 2. La somma dei due numeri è la quantità che il secondo giocatore deve pagare al primo.

$$X = [0, 1] \text{ e } Y = [0, 2]$$

$$f(x, y) = x + y$$

Se foste il primo giocatore, cosa giochereste? E se foste il secondo?

Due amici hanno comprato due oggetti identici, mentre tornano a casa un signore in metro inavvertitamente li rompe entrambi. Il signore è disposto a ripagare gli oggetti, ma non sa quale sia il loro costo anche se lo stima tra i 10 e i 13 euro.

Decide di fare questa proposta: "Scrivete su un foglio il costo dell'oggetto. Se scriverete lo stesso numero, vuol dire che quello è il costo dell'oggetto e vi darò quel valore. Se invece scriverete due numeri diversi, premierò chi è stato onesto e ha scritto il numero più basso dandogli 4 euro in più della cifra che ha scritto, mentre darò 4 euro in meno a chi mi ha imbrogliato e ha scritto il numero più alto."

Come rappresentare questo gioco?

Qual è l'equilibrio di Nash?

Una coppia di amici sta andando a caccia. Ognuno può decidere se andare a cacciare un cervo o una lepre, ogni cacciatore può catturare da solo la lepre, invece per catturare il cervo deve esserci anche il suo compagno. Ovviamente è meglio catturare un cervo di una lepre.

Qual è l'equilibrio di Nash?

$$\begin{pmatrix} (5, 5) & (0, 1) \\ (1, 0) & (1, 1) \end{pmatrix}$$

## Pari o dispari

Come si può rappresentare il gioco “pari o dispari”? E qual è la strategia migliore per giocare?

## Sasso Carta Forbice

Due giocatori devono scegliere contemporaneamente uno dei tre simboli e poi asso batte forbice, forbice batte carta e carta batte forbice.

Come si può rappresentare questo gioco? E qual è la strategia migliore per giocare?