POLITECNICO DI MILANO
FACOLTÀ DI INGEGNERIA INDUSTRIALE E DELL'INFORMAZIONE
CORSO DI STUDI IN INGEGNERIA MATEMATICA

Equilibri di Nash e di tipo Leadership con applicazione ai Patrolling Games

Stefania Gabrielli

Relatore:
Prof. Roberto Lucchetti

Anno Accademico 2013 - 2014

Gioco a due giocatori

Si consideri un gioco a due giocatori, descritto mediante una bimatrice $m \times n$. Siano A e B le matrici dei payoff rispettivamente di I e II, con:

1. $[A_1, \ldots, A_n]$ colonne della matrice A;
2. $[B_1, \ldots, B_n]$ colonne della matrice B;
3. a_{ij} ($i = \{1, \ldots, m\}, j = \{1, \ldots, n\}$) elementi di A;
4. b_{ij} ($i = \{1, \ldots, m\}, j = \{1, \ldots, n\}$) elementi di B.

Siano $M = \{1, \ldots, m\}$ e $N = \{1, \ldots, n\}$ gli insieme delle strategie pure di I e II rispettivamente e

$$X = \{(x_1, \ldots, x_m) \mid \forall i \in M \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i \in M} x_i = 1\}$$

$$Y = \{(y_1, \ldots, y_n)^T \mid \forall j \in N \quad y_j \geq 0, \quad \sum_{j \in N} y_j = 1\}$$

gli insieme delle strategie miste di I e II.

Gioco simultaneo e equilibrio di Nash

Definizione

In un gioco simultaneo, i due attori agiscono contemporaneamente: il giocatore I sceglie una strategia $x \in X$*, il II sceglie* $y \in Y$*. I payoff saranno* $f(x,y) = xAy$ *e* $g(x,y) = xBy$*, rispettivamente per il primo e per il secondo.*

Definizione

Una coppia di strategie (x, y) *forma un equilibrio di Nash se soddisfa le seguenti condizioni:*

1. *I gioca la strategia ottimale* x *a* y *fissato:* $f(x,y) \geq f(x',y) \quad \forall x' \in X$;
2. *II gioca la strategia ottimale* y *a* x *fissato:* $g(x,y) \geq g(x,y') \quad \forall y' \in Y$.

Gioco Leadership e equilibrio Leader-Follower

Definizione

Un Leadership Game è un gioco in cui il Leader agisce per primo annunciando la sua strategia x*; il secondo giocatore (Follower), osserva* x *e risponde con una best-reply* $\overline{f}(x)$ *(con* $\overline{f} : X \to Y$*).In questo caso i payoff sono* $f(x, \overline{f}(x))$ *e* $g(x, \overline{f}(x))$*.*

Definizione

Un equilibrio Leader-Follower è un subgame perfect equilibrium $(x, \overline{f})$ *del Leadership game,* $\overline{f}(x')$ *è una best reply per ogni* $x' \in X$*, non solo per la strategia* x *che il Leader annuncia.*

Definizione

Per ogni $j \in N$ la best reply region $X(j)$ è l'insieme delle strategie x in X tali che j sia la best reply a x. Quindi:

$$X(j) = \{x \in X \mid \forall k \in N \quad xB_j \geq xB_k\}$$

Definizione

Una strategia j in N è detta inducibile se j è l'unica best reply per qualche x in X.

Osservazioni

*In caso di non unicità della best-reply si possono considerare due approcci del Follower, uno ostile al Leader (**Problema Debole di Stackelberg**), l'altro favorevole (**Problema Forte di Stackelberg**).*

Equilibri di Nash e Leader-Follower in un gioco a somma zero

Teorema

Per un two-person zero-sum game i concetti di soluzione di Nash e di tipo Leader-Follower portano allo stesso risultato.

In un gioco simultaneo l'equilibrio di Nash è la coppia di strategie $(\bar{x}, \bar{y})$ tale che:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = -g(\bar{x}, \bar{y}) = \sup_x \inf_y f(x, y) = \inf_y \sup_x f(x, y). \tag{1}$$

In un gioco di tipo Leadership, il Follower risponde a una strategia x del Leader con una y che gli permette di ottenere il $\sup_y g(x, y) = \inf_y f(x, y)$. Il Leader sceglierà x che gli permette di ottenere $\sup_x \inf_y f(x, y)$.

Notazione per un gioco a $k+1$ giocatori

Sia N l'insieme dei giocatori. $\forall i \in N$:

- S_i: insieme compatto e convesso delle strategie di i;
- $u_i : \prod_{i \in N} S_i \to \mathbb{R}$ *funzione payoff* continua del giocatore i;
- $S_{-i} = \prod_{j \in N - \{i\}} S_j$.

Definizione

La best reply del giocatore i alle strategie dei rimanenti attori è una multifunzione $B_i : S_{-i} \twoheadrightarrow S_i$ *tale che:*

$$B_i(s_{-i}) = \underset{s_i \in S_i}{\operatorname{argmax}}\, u_i(s_i, s_{-i});$$

$B_i(s_{-i})$ è sottoinsieme chiuso, convesso, non vuoto del simplesso delle strategie miste di i; B_i è una multifunzione *upper hemi-continua* per ogni $s_{-i} \in S_{-i}$ e ha grafico chiuso.

Notazione per un gioco a $k + 1$ giocatori

Definizione

Un punto fisso di $f : X \twoheadrightarrow X$ è un $x^* \in X$ tale che $x^* \in f(x^*)$.

Teorema

*(**Teorema di Kakutani**) Sia $f : X \twoheadrightarrow X$. Se X è non vuoto, compatto e convesso e se $f(x)$ è non vuoto, convesso per ogni $x \in X$ e ha un grafico chiuso, allora f ha un punto fisso.*

Osservazioni

Dal Teorema di Kakutani si evince che $B = B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_{k+1}$ ha un punto fisso s con $s_i \in B_i(s_{-i})$; questo è un equilibrio del gioco in cui ogni giocatore i risponde con una best-reply s_i a s_{-i}.

Leadership Game

Sia $N = \{1, \dots, k+1\}$, si impone che il giocatore 1 sia il Leader e gli altri (giocatori 2,...,$k+1$) siano i Follower .

1. Il Leader annuncia una strategia $s_1 \in S_1$;
2. i Follower osservano s_1 e rispondono simultaneamente con le strategie $s_2, \dots, s_{k+1}$.

Si pone $X = S_1$, $Y = S_{-1}$, $x = s_1$ e $y = (s_2, \dots, s_{k+1})$ (profilo parziale delle strategie dei Follower) con $y = f(x)$ ($f : X \to Y$).
Per ogni profilo di strategie (x, f) si definisce il payoff del Leader come $a(x, y) = u_1(x, y)$.

Leadership Game

Definizione

Si definisce $E(x)$, per $x \in X$, l'insieme degli equilibri di Nash del gioco indotto da x.

Definizione

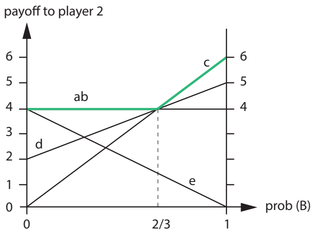
Si consideri $F : X \twoheadrightarrow Y$ tale che:

$$F(x) = \operatorname*{argmin}_{y \in E(x)} a(x, y). \tag{2}$$

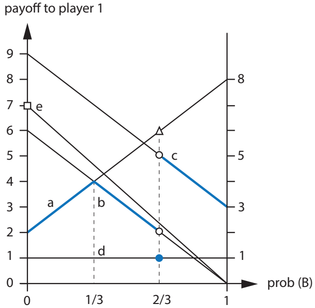
Dunque $F(x)$ è l'insieme di tutti gli $y \in E(x)$ che minimizzano $a(x, y)$.

Esempio

	a	b	c	d	e
T	(2,4)	(6,4)	(9,0)	(1,2)	(7,4)
B	(8,4)	(0,4)	(3,6)	(1,5)	(0,0)



(a)



(b)

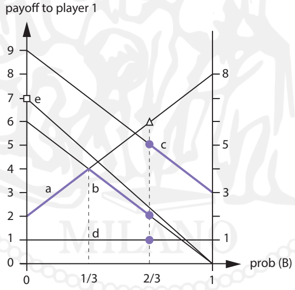
Leadership Game

Teorema

Il minimo payoff Leader è dato da:

$$L = \sup_{x \in X} \min_{y \in E(x)} a(x,y) = \sup_{x \in X} \max_{y \in F(x)} a(x,y) = \max_{x \in X} \max_{y \in \bar{F}(x)} a(x,y). \qquad (3)$$

Con $\bar{F}$ la versione *UHC* di F



(b)

Confronto equilibri

Teorema

Siano:

(a) $E(x)$ *convesso per ogni* $x \in X$,

(b) $a(x, y)$ *funzione convessa di* y *sul dominio convesso* $E(x)$.

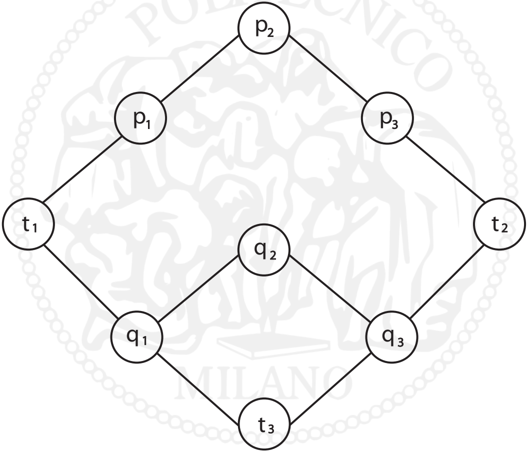
Allora il minimo Leader payoff L è maggiore o uguale a qualche Nash payoff del primo giocatore in un gioco simultaneo.

Le ipotesi del Teorema sono sempre rispettate in un gioco con un solo Follower:

(a) $E = B_2$ e B_2 è una funzione a valori convessi,

(b) il payoff atteso del Leader $a(x, y)$ è lineare in y.

I Patrolling Games sono giochi che si basano sull'idea di proteggere un determinato *environment* da eventuali attacchi.



Patrolling Games

1. L'environment rappresentato con un insieme di nodi V (zone sottoposte ad un attacco);
2. Il pattugliatore ha come obiettivo quello di nascondere un determinato bene in un nodo;
3. il numero di intrusi (n) può essere pari a 1 o a 2; questi hanno come obiettivo quello di trovare il bene nascosto. L'intruso può attaccare un qualsiasi vertice ma, se gli attaccanti sono due, questi hanno la possibilità di compiere l'attacco con successo, solo se scelgono lo stesso nodo in cui agire.

Patrolling Games

I possibili esiti del gioco nel caso $n = 1$:

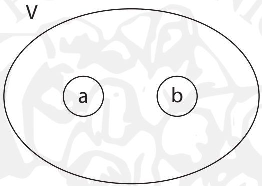
- Attacco riuscito nel nodo di valore aggiunto, con payoff $(-7, 7)$;
- Attacco riuscito nel nodo privo di valore con payoff $(-1, 1)$;

I possibili esiti del gioco nel caso $n = 2$:

- Attacco fallito con payoff $(0, 0, 0)$ (rispettivamente del Leader, e dei due Follower);
- Attacco riuscito nel nodo di valore aggiunto con payoff $(-7, 7, 7)$;
- Attacco riuscito nel nodo privo di valore con payoff $(-1, 1, 1)$;

Patrolling Games $n = 1$

Il pattugliatore può scegliere se posizionare l'oggetto di valore in a o in b, mentre il Follower può decidere quale vertice attaccare.



	Attacco a	Attacco b
a	-7	-1
b	-1	-7

Gli equilibri di Nash e Leader-Follower sono uguali: $((\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$; il payoff per i giocatori è pari a $(-4, 4)$.

Patrolling Games $n = 2$

I Follower possono decidere quale vertice attaccare, però, solo in caso di accordo, l'attacco viene effettuato.

	Attacco a	Attacco b
Attacco a	(-7,7,7)	(0,0,0)
Attacco b	(0,0,0)	(-1,1,1)

a

	Attacco a	Attacco b
Attacco a	(-1,1,1)	(0,0,0)
Attacco b	(0,0,0)	(-7,7,7)

b

Patrolling Games $n = 2$

Se il gioco è simultaneo, gli equilibri di Nash sono i seguenti:

- $((1,0),(0,1),(0,1))$ (cioè (a,b,b)) con payoff $(-1,1,1)$;
- $((0,1),(1,0),(1,0))$(cioè (b,a,a)) con payoff $(-1,1,1)$;
- $((1,0),(0.125,0.875),(0.125,0.875))$ con payoff $(-\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{7}{8})$;
- $((0,1),(0.875,0.125),(0.875,0.125))$ con payoff $(-\frac{7}{8},\frac{7}{8},\frac{7}{8})$;
- $((0.5,0.5)(0.5,0.5),(0.5,0.5))$ con payoff $(-2,2,2)$

Patrolling Games $n = 2$

Se il gioco è di tipo Leadership si ipotizza che il Leader annuncia una strategia mista $(p, 1-p)$;

1. se $0 \leq p < 0.5$ i Follower attaccheranno entrambi il nodo b con conseguente payoff pari a $(6p-7, 7-6p, 7-6p)$;
2. se $0.5 < p \leq 1$ allora i Follower sceglieranno entrambi di introdursi nel nodo a con conseguente payoff pari a $(-6p-1, 6p+1, 6p+1)$.

La scelta ottimale per il pattugliatore è quella di annunciare una strategia mista $(0.5, 0.5)$ con conseguente utilità per i giocatori: $(-4, 4, 4)$.

Patrolling Games come giochi di Stackelberg a 2 giocatori

Nicola Basilico, Nicola Gatti, and Francesco Amigoni. Patrolling security games: Definition and algorithms for solving large instances with single patroller and single intruder.

- Si considerano due giocatori, un *attaccante* **A** e un *difensore* **D**;
- si assume un tempo discreto;
- si modellizza lo spazio con un *grafo* $G = (V, A, T, v, d)$;
- si definiscono le strategie dei giocatori ad ogni turno;
- si porta il gioco in forma strategica;
- si stabiliscono le strategie deterministiche e le tecniche di riduzione che permettono di ridurre il costo computazione necessario per la risoluzione.

Patrolling Games come giochi di Stackelberg a 3 giocatori

Si considerano tre giocatori, due attaccanti A_1 e A_2 e un difensore che ha a disposizione due pattuglie di controllo, D_1 e D_2.
Il *grafo* $G = (V, A, T, v, d)$.

1. V è l'insieme dei vertici che compongono l'environment;
2. A è l'insieme degli archi che collegano i vari vertici del grafo (funzione $a : V \times V \rightarrow \{0, 1\}$ in cui $a(i, j) = 1$ se $(i, j) \in A$, altrimenti $a(i, j) = 0$);
3. T è l'insieme di *target*;
4. v è definita come una coppia di funzioni $v = (v_D, v_A)$ ($v_D : T \rightarrow \mathbb{R}^+$, $v_A : T \rightarrow \mathbb{R}^+$) che assegnano ad ogni target $t \in T$ un valore rispettivamente per il pattugliatore e per gli attaccanti;
5. d è il tempo (in numero di turni) necessario per compiere l'attacco con successo, in un qualsiasi target.

Patrolling Games come giochi di Stackelberg a 3 giocatori

Il gioco si sviluppa in turni.
Si ipotizza che gli attaccanti, se decidono di colpire l'environment, lo fanno durante lo stesso turno.
Ogni intruso ha due possibili azioni da scegliere:

1. *wait*;
2. *enter(t)* con $t \in T$.

Il difensore, ad ogni turno, potrà scegliere un vertice in cui spostare le proprie pattuglie mediante le azioni: $move_1(k)$ e $move_2(l)$.
I possibili esiti del gioco sono quattro:

- *no-attack*;
- *intruders-capture*;
- *one-penetration-t*;
- *two-penetrations-t,v*;

Patrolling Games come giochi di Stackelberg a 3 giocatori

$$u_D(x) = \begin{cases} \sum_{i \in T} v_D(i) \text{ se } x = & \textit{intruders-capure} \text{ o } \textit{no-attack} \\ \sum_{i \in T \setminus \{t\}} v_D(i) \text{ se } x = & \textit{one-penetration-t} \\ \sum_{i \in T \setminus \{t,v\}} v_D(i) \text{ se } x = & \textit{two-penetrations-t,v} \end{cases}$$

Gli attaccanti, se considerati singolarmente, avranno le seguenti utilità (con $i = \{1,2\}$):

$$u_{A_i}(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x = & \textit{no-attack} \\ v_A(t) \text{ se } x = & \textit{penetration-t} \\ \frac{v_A(t)}{2} \text{ se } x = & \textit{two-penetration-t,t} \\ -1 \text{ se } x = & \textit{intruder-capture} \end{cases}$$

Patrolling Games come giochi di Stackelberg a 3 giocatori

Gioco in forma strategica

Le strategie dei giocatori dipenderanno da un percorso h del pattugliatore, di lunghezza $l = 1$.

Le azioni del pattugliatore saranno le coppie di probabilità $\{\alpha_{ik}\}$ e $\{\beta_{jl}\}$.

Le azioni degli attaccanti A_1 e A_2 saranno: $enter - when_i(t, h)$ con $i = 1, 2$ e *stay-out*.

Si determinano le:

1. strategie deterministiche;
2. strategie dominate.

Bibliografia parziale

- Steven Alpern, Alec Morton, and Katerina Papadaki. Optimizing randomized patrols. 2009.
- Francesco Amigoni, Nicola Basilico and Nicola Gatti. Patrolling security games: Definition and algorithms for solving large instances with single patroller and single intruder. *Artificial intelligence*, 2012.
- Francesco Amigoni, Nicola Basilico and Nicola Gatti. Leader-follower strategies for robotic patrolling in environments with arbitrary topologies. In *Proceeding of The 8th International Conference on Autonomous Agents and Multiagent Systems-Volume 1*, 2009.
- Francesco Amigoni, Nicola Basilico, and Nicola Gatti. Finding the optimal strategies for robotic patrolling with adversaries in topologically-represented environments. In *Robotics and Automation* 2009.
- Bernhard Von Stengel and Shmuel Zamir. Leadership games with convex strategy sets. *Games and Economic Behavior*, 2010.