Power indices on cooperative games: semivalues.

Giulia Bernardi

Università degli Studi di Milano Bicocca

26 Novembre 2013

Giochi cooperativi

Giochi cooperativi

N insieme dei giocatori.
$v : 2^N \to \mathbb{R}$ funzione di utilità, tale che $v(\emptyset) = 0$.

Spazio vettoriale di tutti i giochi su N: $\mathscr{G}_N \simeq \mathbb{R}^{2^n-1}$

Giochi semplici

- v è monotono: $v(S) \leq v(T)$ se $S \subseteq T$
- $v : 2^N \to \{0, 1\}$
- $v(N) = 1$

Soluzione

Soluzione

$\varphi : \mathscr{G}_N \to \mathbb{R}^n$ t.c. $\varphi_i(v)$ è la quantità assegnata al giocatore i nel gioco v.

Proprietà:

- *linearità:* $\varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ *e* $\varphi(\lambda v) = \lambda \varphi(v)$*;*
- *positività:* se v è monotono allora $\varphi_i(v) \geq 0 \, \forall i$;
- *efficienza:* $\sum_{i \in N} \varphi_i(v) = v(N)$;
- *simmetria:* per ogni permutazione ϑ su N

$$\varphi_i(\vartheta v) = \varphi_{\vartheta(i)}(v)$$

  dove $(\vartheta v)(S) = v(\vartheta(S))$;
- *dummy player:* $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ per ogni S, allora $\varphi_i(v) = v(\{i\})$.

Indici di potere

Shapley

$$\sigma_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Lineare, simmetrico, soddisfa dummy player ed è efficiente.

Banzhaf

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Lineare, simmetrico, soddisfa dummy player.

Valori probabilistici

Valori probabilistici

$\varphi : \mathscr{G}_N \to \mathbb{R}^n$ lineari, positivi che soddisfano dummy player.

Teorema

*φ è un **valore probabilistico** se e solo se per ogni $i \in N$ esistono $\{p_S^i\}_{S \subseteq N \setminus \{i\}}$ tali che $p_S^i \geq 0$, $\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i = 1$*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Probabilistici + efficienza $\Longrightarrow$ quasivalue.
Probabilistici + simmetria $\Longrightarrow$ semivalue.

Semivalue

Semivalue

$\varphi : \mathscr{G}_N \to \mathbb{R}^n$ lineari, positivi, soddisfano dummy player e sono simmetrici.

Teorema

*φ è un **semivalue** se e solo se esistono $\{p_s\}_{s=0,\dots n-1}$ tali che $p_s \geq 0$, $\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p_s = 1$*

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_s[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Senato della Repubblica

Giochi di maggioranza $v = [q; w_1, \ldots, w_n]$

$$v(S) = 1 \iff \sum_{i \in S} w_i \geq q.$$

$$v = [161; 108, 91, 50, 20, 16, 16, 10, 10]$$

Partito	% Seggi	Shapley	Banzhaf
Partito Democratico	33.65	33.8	32.14
Popolo delle Libertà	28.35	26.19	25.00
5 Stelle	15.58	21.42	23.21
Scelta Civica	6.23	5.24	5.36
Lega Nord	4.98	3.33	3.57
Misto	4.98	3.33	3.57
Grandi Autonomie	3.11	3.33	3.57
Per le Autonomie	3.11	3.33	3.57

Altri semivalue

q-binomiale

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} q^s (1-q)^{n-s-1} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Dittatoriale

$$p_0 = 1$$
$$p_s = 0$$

per ogni
$s = 1, \ldots, n-1.$

Marginale

$$p_s = 0$$
$$p_{n-1} = 1$$

per ogni
$s = 0, \ldots, n-2.$

Valori modificati

Definizione

Se φ è un semivalue con coefficienti p_s, il semivalue $\varphi_{m_1}^{m_2}$ è dato dai coefficienti

$$p'_s = \begin{cases} \frac{p_s}{\sum_{j=m_1}^{m_2} p_j \binom{n-1}{j}} & \textit{se } s \in [m_1, m_2] \\ \\ 0 & \textit{altrimenti.} \end{cases}$$

Shapley modificato:

$$p'_s = \frac{1}{(m_2 - m_1 + 1)\binom{n-1}{s}}$$

Banzhaf modificato:

$$p'_s = \frac{1}{\sum_{j=m_1}^{m_2} \binom{n-1}{j}}$$

Esempio: Senato della Repubblica

	PD	PdL	5 Stelle	Sc. Civica	Altri
$\beta = \beta_0^7$	32.14	25	23.21	5.357	3.571
β_0^1, β_1^1	50	50	0	0	0
β_0^2, β_1^2	37.5	25	18.75	6.25	3.125
$\beta_3^3, \beta_3^4, \beta_4^4$	30.0	25.0	25.0	5.0	3.75
β_2^4, β_3^5	31.05	24.74	24.21	5.263	3.684
β_5^6, β_5^7	37.5	25	18.75	6.25	3.125
β_6^6, β_6^7	50	50	0	0	0

Tabella : Indice di Banzhaf modificato

$\mathscr{G}$ spazio dei giochi finiti

U universo dei giocatori.
$v : 2^U \to \mathbb{R}$ ed esiste N finito tale che $\forall S \subset U,\ v(S) = v(S \cap N)$.

$\mathscr{AG}$ - Giochi additivi: $v(S \cup T) = v(S) + v(T)$

Semivalue su $\mathscr{G}$

$\varphi : \mathscr{G} \to \mathscr{AG}$ che soddisfa:

- linearità;
- simmetria: $\varphi \circ \vartheta = \vartheta \circ \varphi$ per ogni permutazione ϑ;
- monotonia: v monotono $\implies \varphi(v)$ monotono;
- proiezione sugli assi: se $v \in \mathscr{AG}$ allora $\varphi(v) = v$.

Semivalue su Giochi di Unanimità

Giochi unanimità

Per ogni coalizione S:

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & S \subseteq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Sequenza completamente monotona

Una sequenza $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ è completamente monotona se $\mu_n \geq 0$ e

$$(-1)^k \Delta^k \mu_n = (-1)^k \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu_{n+k-j} \geq 0$$

per ogni $k, n = 0, 1, 2, \ldots$.

Semivalue su Giochi di Unanimità

Teorema

L'operatore φ definito sulla base dei giochi d'unanimità

$$\varphi_i^{\alpha}(u_S) = \begin{cases} \alpha_s & \textit{se } i \in S \\ 0 & \textit{altrimenti} \end{cases}$$

e esteso linearmente su tutto lo spazio $\mathscr{G}$ è un semivalue se e solo se $\alpha_1 = 1$ e la sequenza α_s è completamente monotona.

a-value

$$\sigma_i^{a}(u_S) = \begin{cases} \frac{1}{s^a} & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

indice di Shapley per $a = 1$.

Valori q-binomiali

$$\phi_i(u_S) = \begin{cases} q^{t-1} & \text{se } i \in S \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

indice di Banzhaf per $q = \frac{1}{2}$.

Applicazioni

Biologia

Stabilire quali geni siano responsabili di malattie:
geni come giocatori $\rightarrow$ semivalori forniscono una classifica.

Scelte sociali

Dato $\succcurlyeq$ preordine totale su 2^N

$$V(\succcurlyeq) = \{v : v(\emptyset) = 0 \text{ e } v(S) \geq v(T) \iff S \succcurlyeq T\}$$

I semivalori forniscono un ordine sugli elementi di N:

- dato un preordine totale su N estenderlo su 2^N;
- dato un preordine totale su 2^N restringerlo su N.

Bibliografia

Francesc Carreras and Josep Freixas.
Semivalue versatility and applications.
Annals of Operations Research, 109(1-4):343–358, 2002.

Pradeep Dubey, Abraham Neyman, and Robert James Weber.
Value theory without efficiency.
Mathematics of Operations Research, 6(1):122–128, 1981.

Roberto Lucchetti, Paola Radrizzani, and Emanuele Munarini.
A new family of regular semivalues and applications.
International Journal of Game Theory, 40(4):655–675, 2011.

Robert James Weber.
Probabilistic values for games.
The Shapley Value. Essays in Honor of Lloyd S. Shapley, pages 101–119, 1988.